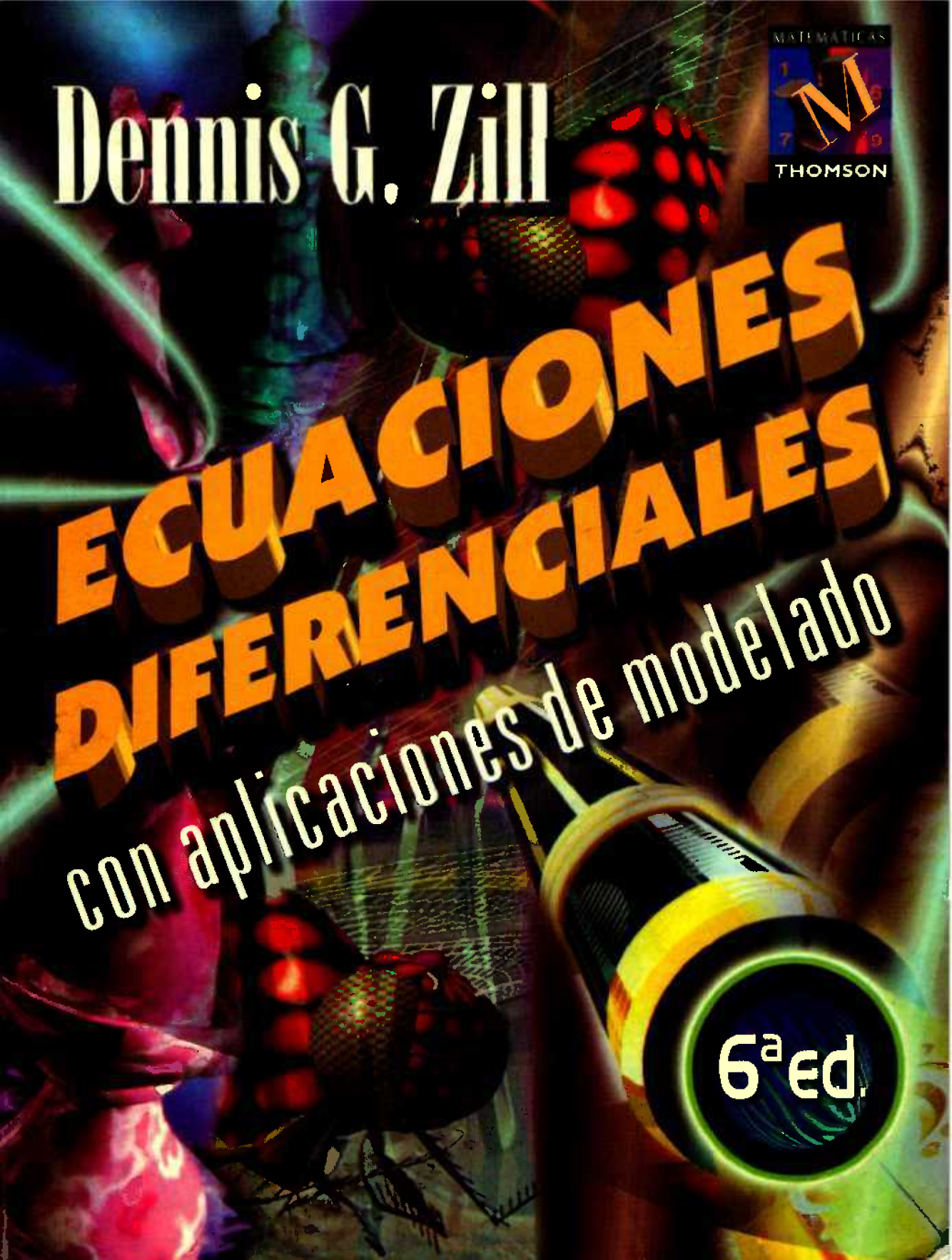

Dennis G. Zill
MATEMÁTICAS
THOMSON
ECUACIONES DIFERENCIALES
con aplicaciones de modelado
6ª ed.

ECUACIONES DIFERENCIALES
CON APLICACIONES DE MODELADO

Sexta edición

Dennis G. Zill
Loyola Marymount University

International Thomson Editores

An International Thomson Publishing Company I T P™

México ■ *Albany* ■ *Bonn* ■ *Boston* ■ *Cambridge* ■ *Cincinnati* ■ *Johannesburg* ■ *London* ■ *Madrid* ■ *Melbourne* ■ *New York*
Paris ■ *Sm Francisco* ■ *San Juan, PR* ■ ♦♋■♦♓♋♑□ ■ *São Paulo* ■ *Singapore* ■ *Tokio* ■ *Toronto* ■ *Washington*

Traducción del libro
Differential Equations with Modeling Applications,
publicado por Brooks/Cole Publishing, 6th ed.
ISBN 0-534-95574-6

Ecuaciones diferenciales, con aplicaciones del modelado
ISBN 968-7529-21-0

Derechos reservados respecto a la 1" edición en español
© 1997 por Intemational Thomson Editores, S.A. de C. V.
Intemational Thomson Editores es una empresa de
Intemational Thomson Publishing I(T)P.

México y América Central
Séneca 53, Col. Polanco
México, D. F., C. P. 11560
Tel. (525)281-2906
Fax (525)281-2656
e-mail: clientes@mail.internet.com.mx

América del Sur
Tel./fax (562)524-4688
e-mail: ldevore@ibm.net
Santiago, Chile

Puerto Rico y El Caribe
Tel. (787)758-7580
Fax (787) 758-7573
e-mail: 102154.1127@compuserve.com
Hato Rey, PR.

Editor externo: Claudio Castro Campillo
Tipografía: Ricardo Viesca Muriel
Lecturas: Luis Aguilar
Diseño de Portada: Maré Concepto Gráfico
Director editorial: Miguel Angel Toledo Castellanos

9865432107 35421M 9VII7

Queda prohibida la reproducción o trasmisión total o parcial del texto de la presente obra bajo cualesquiera formas, electrónica o mecánica, incluyendo el fotocopiado, el almacenamiento en algún sistema de recuperación de información o el grabado, sin el consentimiento previo y por escrito del editor.

All rigths reserved. No part of this book covered by the copyright hereon may be reproduced or used in any form or by any means —graphic, electronic, or mechanical, including photocopying, recording, taping or information storage and retrieval systems— without the written permission of the publisher.

Impreso en México
Printed in Mexico

CONTENIDO

Prefacio ix
Reconocimientos xiii

1 Introducción a las ecuaciones diferenciales 1
1.1 Definiciones y terminología 2
1.2 Problemas de valor inicial 12
1.3 Las ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos 19
Ejercicios de repaso 33

2 Ecuaciones diferenciales de primer orden 36
2.1 Variables separables 37
2.2 Ecuaciones exactas 45
2.3 Ecuaciones lineales 52
2.4 Soluciones por sustitución 63
Ejercicios de repaso 69

3 Modelado con ecuaciones diferenciales de primer orden 71
3.1 Ecuaciones lineales 72
3.2 Ecuaciones no lineales 86
3.3 Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales 97
Ejercicios de repaso 108

La AZT y La supervivencia con SIDA (Ap. IV)
Dinámica de una población de lobos (Ap. IV)

4 Ecuaciones diferenciales de orden superior 112
4.1 Teoría preliminar: ecuaciones lineales 113
4.1.1 Problemas de valor inicial y de valor en la frontera 113
4.1.2 Ecuaciones homogéneas 116
4.1.3 Ecuaciones no homogéneas 123
4.2 Reducción de orden 130

4.3 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes 133
4.4 Coeficientes indeterminados método de la superposición, 142
4.5 Coeficientes indeterminados método del anulador 153
4.6 Variación de parámetros 163
4.7 Ecuación de Cauchy-Euler 169
4.8 Sistemas de ecuaciones lineales 177
4.9 Ecuaciones no lineales 186
Ejercicios de repaso 193

5 Modelado con ecuaciones diferenciales de orden superior 195
5.1 Ecuaciones lineales: problemas de valor inicial 196
5.1.1 Sistema de resorte y masa: movimiento libre no amortiguado 196
5.1.2 Sistemas de resorte y masa: movimiento amortiguado libre 20 1
5.1.3 Sistemas de resorte y masa: movimiento forzado 206
5.1.4 Sistemas análogos 2 ll
5.2 Ecuaciones lineales: problemas de valores en la frontera 222
5.3 Ecuaciones no lineales 233
Ejercicios de repaso 244

Degeneración de las órbitas de los satélites (Ap. IV)
Derrumbe del puente colgante de Tacoma Narrows (Ap. IV)

6 Soluciones en forma de series de potencias de ecuaciones lineales 247
6.1 Repaso de las series de potencias; soluciones en forma de series de potencias 248
6.2 Soluciones en torno a puntos ordinarios 257
6.3 Soluciones en torno a puntos singulares 265
6.4 Dos ecuaciones especiales 278
Ejercicios de repaso 294

7 **La transformada de Laplace 295**
7.1 Definición de la transformada de Laplace 296
7.2 Transformada inversa 305
7.3 Teoremas de traslación y derivadas de una transformada 312
7.4 Transformadas de derivadas, integrales y funciones periódicas 325
7.5 Aplicaciones 333
7.6 Función delta de Dirac 349
7.7 Sistemas de ecuaciones lineales 354
Ejercicios de repaso 362

8 **Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden 365**
8.1 Teoría preliminar 366
8.2 Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes 376
8.2.1 Valores propios reales y distintos 376
8.2.2 Valores propios repetidos 380
8.2.3 Valores propios complejos 384
8.3 Variación de parámetros 390
8.4 Matriz exponencial 395
Ejercicios de repaso 398

Modelado de una carrera armamentista (Ap. IV)

9 **Métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias 400**
9.1 Campos direccionales 401
9.2 Métodos de Euler 405
9.3 Métodos de Runge-Kutta 414
9.4 Métodos multipasos 421
9.5 Ecuaciones y sistemas. de ecuaciones de orden superior 424
9.6 Problemas de valor en la frontera de segundo orden 430
Ejercicios de repaso 435

10 **Funciones ortogonales y series de Fourier 437**
10.1 Funciones ortogonales 438
10.2 Series de Fourier 444
10.3 Series de Fourier de cosenos y de senos 449
10.4 El problema de Sturm-Lìouville 460
10.5 Series de Bessel y de Legendre 468
10.5.1 Serie de Fourier-Bessel 469
10.5.2 Serie de Fourier-Legendre 472
Ejercicios de Repaso 475

11 **Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y problemas de valor en la frontera en coordenadas rectangulares 477**
11.1 Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales separables 478
11.2 Ecuaciones clásicas y problemas de valor en la frontera 483
11.3 Ecuación de transmisión de calor 491
11.4 Ecuación de onda 494
11.5 Ecuación de Laplace 501
11.6 Ecuaciones no homogéneas y condiciones en la frontera 505
11.7 Empleo de series de Fourier generalizadas 509
11.8 Problemas de valor en la frontera con series de Fourier con dos variables 514
Ejercicios de repaso 518

Apéndice I Función gamma **AP-1**
Apéndice II Introducción a las matrices **AP-4**
Apéndice III Tabla de transformadas de Laplace **AP-24**
Apéndice IV Aplicaciones del modelado **AP-27**
A La AZT y la supervivencia con SIDA AP-28
B Dinámica de una población de lobos AP-30
C Degeneración de las órbitas de los satélites AP-33
D Derrumbe del puente colgante de Tacoma Narrows AP-35
E Modelado de una carrera armamentista AP-37
Apéndice V Tabla de transformadas de Laplace **AP-39**
Apéndice VI Tabla de integrales AP-41

Respuestas a los problemas de número impar R-1

Índice I-1

PREFACIO

Las modificaciones que se hicieron para la sexta edición, en inglés, de ***Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado,*** tuvieron dos fines: asegurar que la información fuera actual y relevante para los alumnos y, al mismo tiempo, mantener las bases que se usaron en las ediciones anteriores. Este nuevo libro, escrito teniendo en cuenta al alumno, conserva el nivel básico y el estilo directo de presentación de las ediciones anteriores.

En ecuaciones diferenciales, igual que en muchos otros cursos de matemáticas, los profesores comienzan a dudar de algunos aspectos de los métodos pedagógicos tradicionales. Esta saludable valoración es importante para que el tema no sólo tenga más interés para los alumnos, sino también para que sea más aplicable en el mundo en que se desenvuelven. Los cambios de contenido y estilo de ***Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado, Sexta edición*** (incluyendo el subtítulo) reflejan las innovaciones que ha observado el autor en el ámbito general de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.

Resumen de los cambios principales

■ ***Más énfasis en las ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos.*** Ahora se entreteje la noción de un modelo matemático en todo el libro y se describe la formulación y fallas de esos modelos.

■ ***Cinco nuevas aplicaciones de modelado.*** Estas aplicaciones son contribuciones de expertos en cada campo y cubren áreas profundas de estudio, desde la AZT y la supervivencia con SIDA, hasta los efectos de la reintroducción del lobo gris al Parque Nacional Yellowstone. En la edición en español se han concentrado en el apéndice IV: Aplicación al modelado; pero se conserva su relación didáctica con los capítulos que enriquecen mediante su referencia en el índice.

■ ***Más énfasis en las ecuaciones diferenciales no lineales, así como en los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales.*** Tres capítulos contienen secciones nuevas (3.3, 4.9, 5.2 y 5.3).

■ ***Más énfasis en problemas de valores en la frontera, para ecuaciones diferenciales ordinarias.*** En el capítulo 5 se presentan como novedad los valores y funciones propios.

■ ***Mayor utilización de la tecnología.*** Cuando es adecuado, se usan calculadoras graficadoras, programas de graficación, sistemas algebraicos computacionales y programas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (*ODE Solver*) en aplicaciones y ejemplos, así como en los conjuntos de ejercicios.

■ ***Mayor cantidad de problemas conceptuales en los ejercicios.*** En muchas secciones se han agregado 'Problemas para discusión". En lugar de pedir al alumno que resuelva una ecuación diferencial, se le pide que medite en lo que comunican o dicen esas ecuaciones. Para impulsar el razonamiento del estudiante a fin de que llegue a conclusiones e investigue posibilidades, las respuestas se omitieron intencionalmente. Algunos de estos problemas pueden servir de tareas individuales o grupales, según el criterio del profesor.

Cambios por capítulo en esta edición

El capítulo 1 se ha ampliado con las nociones de un problema de valor inicial y programas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias en la sección 1.2. Se ha vuelto a redactar la descripción de las ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos en la sección 1.3, a fin de que el alumno la comprenda con más facilidad.

Ahora, el capítulo 2 combina la descripción de las ecuaciones homogéneas de primer orden con la de la ecuación de Bernoulli, en la sección 2.4, ***Soluciónpor sustitución.*** El material sobre las ecuaciones de Ricatti y de Clairaut aparece en los ejercicios.

El capitulo 3 tiene una nueva sección 3.3, ***Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales,*** que presenta sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden como modelos matemáticos. Las trayectorias ortogonales se dejaron para los ejercicios.

El capítulo 4 presenta el concepto de un operador diferencial lineal, en la sección 4.1, con objeto de facilitar las demostraciones de algunos teoremas importantes. La forma ligeramente distinta de exponer las dos ecuaciones que definen los "parámetros variables" se presenta en la sección 4.6, y se la debemos a un estudiante, J. Thoo.* La ecuación de Cauchy-Euler se describe en la sección 4.7. Los sistemas de solución de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes han pasado a la sección 4.8. Hay una nueva sección, la ***4.9, Ecuaciones no lineales,*** que comienza con una descripción cualitativa de las diferencias entre ecuaciones lineales y no lineales.

El capítulo 5 contiene dos nuevas secciones. La ***5.2, Ecuaciones lineales: problemas de valores en la frontera,*** presenta los conceptos de valores propios y funciones propias (eigenvalores y eigenfunciones). La sección 5.3, ***Ecuaciones no lineales,*** describe el modelado con ecuaciones diferenciales no lineales de orden mayor.

El capítulo 6 sólo trata las soluciones en forma de serie de las ecuaciones diferenciales lineales.

La sección 7.7 presenta la aplicación de la transformada de Laplace a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. En la sección 7.3 se agregó una forma alternativa del segundo teorema de traslación.

El capítulo 8 se limita a la teorfa y solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, porque lo referente a las matrices se ha pasado al Apéndice II. Con esta distribución, el profesor puede decidir si el material es de lectura, o si lo intercala para exponerlo en clase.

---

*J. Thoo, "Timing is Everything," *The College Mathematical Journal*, Vol. 23, N° 4, septiembre de 1992.

El capítulo 9 se volvió a escribir. El análisis de errores de las diversas técnicas numéricas se presenta en la sección respectiva que se destina a cada método.

Complementos

Para los profesores*

Complete Solutions Manual (Warren W. Wright), donde aparece el desarrollo de las respuestas a todos los problemas del texto.

Experiments for Differential Equations (Dermis G. Zill/Warren S. Wright), que contiene un surtido de experimentos para laboratorio de computación, con ecuaciones diferenciales.

Programas

ODE Solver: Numerical Procedures for Ordinary Differential Equations (Thomas Kiffe/William Rundel), para computadoras IBM y compatibles, y para Macintosh. Es un paquete que presenta representaciones tabulares y gráficas de los resultados, para los diversos métodos numéricos. No se requiere programación.

Programas en BASIC, FORTRAN y *Pascal* (C. J. Knickerbocker), para PC compatibles y Macintosh. Contienen listados de programas para muchos de los métodos numéricos que se describen aquí.

*Estos materiales (en inglés) se proporcionan a profesores que usen el libro como texto, para información enviar un correo electrónico a: clientes@mail.internet.com.mx.

RECONOCIMIENTOS

Estoy muy agradecido con las siguientes personas, que contribuyeron a esta edición con su ayuda, sugerencias y criticas:

Scott Wright, Loyola Marymount University
Bruce Bayly, University of Arizona
Dean R. Brown, Youngstown State University
Nguyen P. Cac, University of lowa
Philip Crooke, Vanderbilt University
Bruce E. Davis, St. Louis Community College at Florissant Valley
Donna Farrior, University of Tulsa
Terry Herdman, Virginia Polytechnic Institute and State University
S. K. Jain, Ohio University
Cecelia Laurie, University of Alabama
James R. McKinney, California Polytechnic State University
James, L. Meek, University of Arkansas
Brian M. O'Connor, Tennessee Techonological University

Mi especial reconocimiento a

John Ellison, Grove City College
C. J. Knickerbocker, St. Lawrence University
Ivan Kramer, University of Maryland, Baltimore County
Gilbert Lewis, Michigan Technological University
Michael Olinick, Middlebury College

que, con mucha generosidad y escamoteando tiempo a sus apretadas agendas, proporcionaron los nuevos ensayos sobre aplicaciones del modelado.

Por ultimo, una nota personal: quienes se hayan fijado, habrán notado que ya no está el logo acostumbrado de PWS, un león, en el lomo del libro. Al trabajar con el personal de Brooks/Cole, otra filial de ITP, la empresa matriz, no puedo olvidar a tantas y tan buenas personas que encontré, con las cuales trabajé —e incluso contendí-, durante los últimos veinte años en PWS. Así que, a todas las personas de producción, mercadotecnia y departamento editorial, en especial a Barbara Lovenvirth, mi editora *de facto*, les digo adiós y les deseo buena suerte. Gracias por el trabajo que han hecho; el ultimo.

Dennis G. Zill
Los Angeles

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

1.1 Definiciones y terminología
1.2 Problemas de valor inicial
1.3 Las ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos
Ejercicios de repaso

INTRODUCCIÓN

Las palabras *ecuaciones* y *diferenciales* nos hacen pensar en la solución de cierto tipo de ecuación que contenga derivadas. Así como al estudiar álgebra y trigonometría se invierte bastante tiempo en resolver ecuaciones, como $x^2 + 5x + 4 = 0$ con la variable x, en este curso vamos a resolver ecuaciones diferenciales como $y'' + 2y' + y = 0$, para conocer la *función* y. Pero antes de comenzar cualquier cosa, el lector debe aprender algo de las definiciones y terminología básicas en este tema.

1.1 DEFINICIONES Y TERMINOLOGÍA

- *Ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales* ■ *Orden de una ecuación*
- *Ecuaciones lineales y no lineales* ■ *Solución de una ecuación diferencial*
- *Soluciones explícitas e implícitas* ■ *Solución trivial* ■ *Familia de soluciones*
- *Solución particular* ■ *Solución general* ■ *Sistemas de ecuaciones diferenciales*

Ecuación diferencial En cálculo aprendimos que la derivada, dy/dx, de la función $y = \phi(x)$ es en sí, otra función de x que se determina siguiendo las reglas adecuadas; por ejemplo, si $y = e^{x^2}$, entonces $dy/dx = 2xe^{x^2}$. Al reemplazar e^{x^2} por el símbolo y se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = 2xy. \tag{1}$$

El problema al que nos encararemos en este curso no es "dada una función $y = \phi(x)$, determinar su derivada". El problema es "dada una ecuación diferencial, como la ecuación 1, ¿hay algún método por el cual podamos llegar a la función desconocida $y = \phi(x)$?"

DEFINICIÓN 1.1 Ecuación diferencial

Una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes es una ecuación diferencial.

Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo con **su tipo, orden y linealidad.**

Clasificación según el tipo Si una ecuación sólo contiene derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, entonces se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria.** Por ejemplo

$$\frac{dy}{dx} + 10y = e^x \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias. Una ecuación que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes, respecto de dos o más variables independientes, se llama **ecuación en derivadas parciales.** Por ejemplo,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

son ecuaciones en derivadas parciales,

Clasificación según el orden El **orden de una ecuación diferencial** (ordinaria o en derivadas parciales) es el de la derivada de mayor orden en la ecuación. Por ejemplo,

segundo orden ↓ ↓ primer orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

es una ecuación diferencial de segundo orden. Como la ecuación $(y - x)\,dx + 4x\,dy = 0$ se puede escribir en la forma

$$4x\frac{dy}{dx} + y = x$$

si se divide entre la diferencial dx, es un ejemplo de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

Una ecuación diferencial ordinaria general de orden n se suele representar mediante los símbolos

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{2}$$

En las explicaciones y demostraciones de este libro supondremos que se puede despejar la derivada de orden máximo, $y^{(n)}$, de una ecuación diferencial de orden n, como la ecuación (2); esto es,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Clasificación según la linealidad o no linealidad Se dice que una ecuación diferencial de la forma $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ **es lineal** cuandofes una función lineal dey, $y', \ldots, y^{(n-1)}$. Esto significa que una ecuación es lineal si se puede escribir en la forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

En esta última ecuación, vemos las dos propiedades características de las ecuaciones diferenciales lineales:

i) La variable dependiente y y todas sus derivadas son de primer grado; esto es, la potencia de todo término donde aparece y es 1.
ii) Ca& coeficiente sólo depende de x, que es la variable independiente.

Las funciones dey como sen y o las funciones de las derivadas dey, como e $^{y'}$ no pueden aparecer en una ecuación lineal. Cuando una **ecuación** diferencial no es lineal, se dice que es no **lineal.** Las ecuaciones

$$(y - x)\,dx + 4x\,dy = 0, \qquad y'' - 2y' + y = 0, \qquad x^3\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{dy}{dx} + 6y = e^x$$

son ecuaciones lineales ordinarias de primero, segundo y tercer orden, respectivamente. Por otro lado,

el coeficiente depende dey	función no lineal dey	potencia distinta de 1
↓	↓	↓
$(1 + y)\,y' + 2y = e^x$,	$\frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen} y = 0$,	$\frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0$

son ecuaciones diferenciales no lineales de primero, segundo y cuarto **orden,** respectivamente.

Soluciones Como dijimos, uno de los objetivos de este curso es resolver o hallar las **soluciones** de las ecuaciones diferenciales.

DEFINICIÓN 1.2 **Solución de una ecuación diferencial**

Cuando una función ϕ, definida en algún intervalo I, se sustituye en una ecuación diferencial y transforma esa ecuación en una identidad, se dice que es una solución de la ecuación en el intervalo.

En otras palabras, una solución de una ecuación diferencial ordinaria, como la ecuación (2), es una función ϕ con al menos n derivadas y

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \quad \text{para todo } x \text{ en } I.$$

Se ***dice*** que $y = \phi(x)$ ***satisface*** la ecuación diferencial. El intervalo I puede ser intervalo abierto, (a, b), cerrado, $[a, b]$, infinito, (a, ∞), etcétera. Para nuestros fines, también supondremos que una solución ϕ es una función de valores reales.

EJEMPLO 1 **Comprobación de una solución**

Comprobar que $y = x^4/16$ es una solución de la ecuación no lineal

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN Un modo de comprobar que la función dada es una solución es escribir la ecuación diferencial en la forma $dy/dx - xy^{1/2} = 0$, y ver, después de sustituir, si la suma $dy/dx - xy^{1/2}$ es cero para toda x en el intervalo. Con,

$$\frac{dy}{dx} = 4\frac{x^3}{16} = \frac{x^3}{4} \qquad \text{y} \qquad y^{1/2} = \left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2} = \frac{x^2}{4},$$

vemos que

$$\frac{dy}{dx} - xy^{1/2} = \frac{x^3}{4} - x\left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2} = \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4} = 0$$

para todo numero real. Obsérvese que $y^{1/2} = x^2/4$ es, por definición, la raíz cuadrada no negativa de $x^4/16$. ■

EJEMPLO 2 **Comprobación de una solución**

La función $y = xe^x$ es una solución de la ecuación lineal

$$y'' - 2y' + y = 0$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Para demostrarlo, sustituimos

$$y' = xe^x + e^x \quad \text{y} \quad y'' = xe^x + 2e^x.$$

Vemos que

$$y'' - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0$$

para todo número real. ■

No toda ecuación diferencial que se nos ocurra tiene, necesariamente, una solución. Para resolver el problema 5 1 de los ejercicios 1.1, el lector debe meditar en lo anterior.

Soluciones explícitas e implícitas Al estudiar cálculo uno se familiariza con los términos ***funciones explícitas e implícitas.*** Como algunos métodos de solución de ecuaciones diferenciales pueden llevar directamente a estas dos formas, las soluciones de las ecuaciones diferenciales se pueden dividir en soluciones explícitas o implícitas. Una solución en que la variable dependiente se expresa tan solo en términos de la variable independiente y constantes, se llama **solución explícita.** Para nuestros fines, podemos decir que una solución explícita es una fórmula explícita $y = \phi(x)$ que podemos manipular, evaluar y diferenciar. En la descripción inicial vimos que $y = e^{x^2}$ es una solución explícita de $dy/dx = 2xy$. En los ejemplos 1 y 2, $y = x^4/16$ y $y = xe^x$ son soluciones explícitas de $dy/dx = xy^{1/2}$ y $y'' - 2y' + y = 0$, respectivamente. Obsérvese que, en los ejemplos 1 y 2, cada ecuación diferencial tiene la solución constante $y = 0$, $-\infty < x < \infty$. Una solución explícita de una ecuación diferencial, que es idéntica a cero en un intervalo I, se llama **solución trivial.** Una relación $G(x, y) = 0$ **es** una **solución implícita** de una ecuación diferencial ordinaria, como la ecuación (2), en un intervalo I, siempre y cuando exista al menos una función ϕ que satisfaga la relación, y la ecuación diferencial, en I. En otras palabras, $G(x, y) = 0$ define implícitamente a la función ϕ.

EJEMPLO 3 **Comprobación de una solución implícita**

La relación $x^2 + y^2 - 4 = 0$ es una solución implícita de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{3}$$

en el intervalo $-2 < x < 2$. Derivando implícitamente obtenemos

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 - \frac{d}{dx}4 = \frac{d}{dx}0 \quad \text{o bien} \quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Al despejar el símbolo dy/dx de la última ecuación se obtiene la ecuación (3). Además, el lector debe comprobar que las funciones $y_1 = \sqrt{4 - x^2}$ y $y_2 = -\sqrt{4 - x^2}$ satisfacen la relación (en otras palabras, que $x^2 + y_1^2 - 4 = 0$ y $x^2 + y_2^2 - 4 = 0$) y son soluciones de la ecuación diferencial **en** $-2 < x < 2$. ■

'Toda relación de la forma $x^2 + y^2 - c = 0$ satisface ***formalmente*** la ecuación (3) para cualquier constante c; sin embargo, se sobreentiende que la relación siempre debe tener sentido

en el sistema de los números reales. Así, por ejemplo, no podemos decir que $x^2 + y^2 + 4 = 0$ sea una solución implícita de la ecuación. (¿Por qué no?)

Debe quedar intuitivamente clara la distinción entre una solución explicita y una implícita, porque en lo sucesivo ya no haremos la aclaración "es una solución explicita (o implícita)".

Más terminología El estudio de las ecuaciones diferenciales es semejante al del cálculo integral. A veces, a una solución se le llama **integral** de la ecuación y a su gráfica, **curva integral** o **curva de solución.** En cálculo, al evaluar una antiderivada o una integral indefinida empleamos una sola constante c de integración. En forma parecida, al resolver una ecuación diferencial de primer orden, $F(x, y, y') = 0$, por lo general obtenemos una solución con una sola constante arbitraria, o parámetro c. Una solución con una constante arbitraria representa un conjunto $G(x, y, c) = 0$ de soluciones y se llama **familia monoparamétrica de soluciones.** Al resolver una ecuación diferencial de orden n, $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, se busca una **familia n-paramétrica de soluciones** $G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$. Esto sólo quiere decir que una sola ecuación diferencial puede tener una cantidad infinita de soluciones que corresponden a las elecciones ilimitadas del parámetro o parámetros. Una solución de una ecuación diferencial que no tiene parámetros arbitrarios se llama **solución particular;** por ejemplo, podemos demostrar que, por sustitución directa, toda función de la familia monoparamétrica $y = ce^{x^2}$ también satisface la ecuación (1). La solución original $y = e^{x^2}$ corresponde a $c = 1$ y, por consiguiente, es una solución particular de la ecuación. La figura 1.1 muestra algunas de las curvas integrales de esta familia. La solución trivial $y = 0$, que corresponde a $c = 0$, también es una solución particular de la ecuación (1).

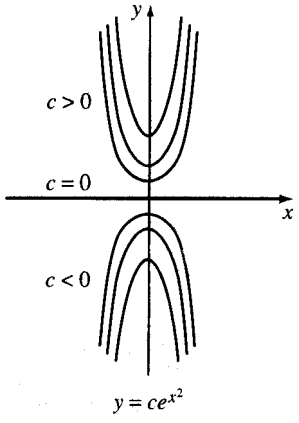


FIGURA 1.1

EJEMPLO 4 **Soluciones particulares**

La función $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ es una familia biparamétrica de soluciones de la ecuación lineal de segundo orden $y'' - y = 0$. Algunas de las soluciones particulares son $y = 0$ (cuando $c_1 = c_2 = 0$), $y = e^x$ (cuando $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$), y $y = 5e^x - 2e^{-x}$ (cuando $c_1 = 5$ y $c_2 = -2$). ■

En todos los ejemplos anteriores hemos usado x y y para representar las variables independiente y dependiente, respectivamente. Pero en la práctica, esas dos variables se repre-

sentan mediante muchos símbolos distintos. Por ejemplo, podríamos representar con t la variable independiente y con x la variable dependiente.

EJEMPLO 5 Uso de distintos símbolos

Las funciones $x = c_1 \cos 4t$ y $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, son soluciones de la ecuación diferencial

$$x'' + 16x = 0.$$

Para $x = c_1 \cos 4t$, las primeras dos derivadas con respecto a t son $x' = -4c_1 \operatorname{sen} 4t$, y $x'' = -16\, c_1 \cos 4t$. Al sustituir x'' y x se obtiene,

$$x'' + 16x = -16c_1 \cos 4t + 16(c_1 \cos 4t) = 0.$$

Análogamente, para $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$, vemos que $x'' = -16c_2 \operatorname{sen} 4t$, y así

$$x'' + 16x = -16c_2 \operatorname{sen} 4t + 16(c_2 \operatorname{sen} 4t) = 0.$$

Por último, es fácil comprobar que la combinación lineal de soluciones —o sea, la familia biparamétrica $x = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t$— es una solución de la ecuación dada. ■

En el próximo ejemplo mostraremos que una solución de una ecuación diferencial puede ser una función definida por tramos.

EJEMPLO 6 Solución definida por tramos

El lector debe comprobar que toda función de la familia monoparamétrica $y = cx^4$ es una solución de la ecuación diferencial $xy' - 4y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$ -Fig. 1.2a—. La función definida por tramos

$$y = \begin{cases} -x^4, & x < 0 \\ x^4, & x \geq 0 \end{cases}$$

es una solución particular de la ecuación, pero no se puede obtener a partir de la familia $y = cx^4$ escogiendo sólo una c (Fig. 1.2b). ■

En algunos casos, una ecuación diferencial tiene una solución que no se puede obtener particularizando alguno de los parámetros en una familia de soluciones. Esa solución se llama solución singular.

EJEMPLO 7 Solución singular

En la sección 2.1 demostraremos que $y = (x^2/4 + c)^2$ proporciona una familia monoparamétrica de soluciones de $y' = xy^{1/2}$. Cuando c = 0, la solución particular que resulta es $y = x^4/16$. En este caso, la solución trivial $y = 0$ es una solución singular de la ecuación porque no se puede obtener partiendo de la familia y eligiendo algún valor del parámetro c. ■

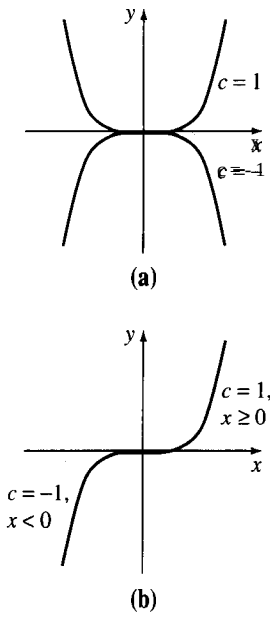


FIGURA 1.2

Solución general Si *toda* solución de una ecuación de orden n, $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, en un intervalo I, se puede obtener partiendo de una familia n-paramétrica $G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$ con valores adecuados de los parámetros c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, se dice que la familia es la **solución general** de la ecuación diferencial. Al resolver las ecuaciones diferenciales lineales vamos a imponer restricciones relativamente sencillas a los coeficientes de esas ecuaciones. Con estas restricciones siempre nos aseguraremos no sólo de que exista una solución en un intervalo, sino también de que una familia de soluciones contenga todas las soluciones posibles. Las ecuaciones no lineales, a excepción de algunas de primer orden, son difíciles de resolver -e incluso resultan irresolubles-, en términos de las funciones elementales comunes (combinaciones finitas de potencias o raíces enteras de x, de funciones exponenciales y logarítmicas, o funciones trigonométricas o trigonométricas inversas). Además, si en cierto momento nos encontramos con una familia de soluciones de una ecuación no lineal, no es obvio cuando la familia es una solución general. Por lo anterior, y en un nivel práctico, el nombre "solución general" sólo se aplica a las ecuaciones diferenciales lineales.

Sistemas de ecuaciones diferenciales Hasta ahora hemos descrito ecuaciones diferenciales aisladas con una función desconocida; pero muchas veces, en teoría y en muchas aplicaciones, debemos manejar *sistemas* de ecuaciones diferenciales. Un **sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias** es un conjunto de dos o más ecuaciones donde aparecen las derivadas de dos o más funciones desconocidas de una sola variable independiente; por ejemplo, si x y y representan variables dependientes y t es la variable independiente, el conjunto siguiente es un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - 4y \\ \frac{dy}{dt} &= x + y. \end{aligned} \tag{4}$$

Una solución de un sistema como el anterior es un par de funciones diferenciables, $x = \phi_1(t)$ y $y = \phi_2(t)$, que satisface cada ecuación del sistema en algún intervalo común I.

Observación

Es necesario exponer algunos conceptos finales acerca de las soluciones implícitas de las ecuaciones diferenciales. A menos que sea importante o adecuado, por lo general no es necesario tratar de despejar y de una solución implícita, $G(x, y) = 0$, para que aparezca una forma explícita en términos de x. En el ejemplo 3 podemos despejar fácilmente y de la relación $x^2 + y^2 - 4 = 0$, en términos de x para llegar a las dos soluciones, $y_1 = \sqrt{4 - x^2}$ y $y_2 = -\sqrt{4 - x^2}$, de la ecuación diferencial $dy/dx = -x/y$; pero no debemos engañarnos con este único ejemplo. Una solución implícita, $G(x, y) = 0$, puede definir una función ϕ perfectamente diferenciable que sea una solución de una ecuación diferencial; pero incluso así resulte imposible despejar en $G(x, y) = 0$ con métodos analíticos como los algebraicos. En la sección 2.2 veremos que $xe^{2y} - \operatorname{sen} xy + y^2 + c = 0$ es una solución implícita de una ecuación diferencial de primer orden. La tarea de despejar y de esta ecuación, en términos de x, presenta más problemas que el tedio de manipular símbolos, ya que no es posible.

EJERCICIOS 1.1

En los problemas 1 a 10, establezca si la ecuación diferencial es lineal o no lineal. Indique el orden de cada ecuación.

1. $(1 - x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$

2. $x\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$

3. $yy' + 2y = 1 + x^2$

4. $x^2\,dy + (y - xy - xe^x)\,dx = 0$

5. $x^3y^{(4)} - x^2y'' + 4xy' - 3y = 0$

6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = \operatorname{sen} y$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$

8. $\dfrac{d^2r}{dt^2} = -\dfrac{k}{r^2}$

9. $(\operatorname{sen} x)y''' - (\cos x)y' = 2$

10. $(1 - y^2)\,dx + x\,dy = 0$

En los problemas 11 a 40, compruebe que la función indicada sea una solución de la ecuación diferencial dada. En algunos casos, suponga un intervalo adecuado de validez de la solución. Cuando aparecen, los símbolos c_1 y c_2 indican constantes.

11. $2y' + y = 0;\quad y = e^{-x/2}$

12. $y' + 4y = 32;\quad y = 8$

13. $\dfrac{dy}{dx} - 2y = e^{3x};\quad y = e^{3x} + 10e^{2x}$

14. $\dfrac{dy}{dt} + 20y = 24;\quad y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$

15. $y' = 25 + y^2;\quad y = 5 \tan 5x$

16. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{y}{x}};\quad y = (\sqrt{x} + c_1)^2,\ x > 0,\ c_1 > 0$

17. $y' + y = \operatorname{sen} x;\quad y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\cos x + 10e^{-x}$

18. $2xy\,dx + (x^2 + 2y)\,dy = 0$; $x^2y + y^2 = c_1$

19. $x^2\,dy + 2xy\,dx = 0$; $y = -\dfrac{1}{x^2}$ 20. $(y')^3 + xy' = y$; $y = x + 1$

21. $y = 2xy' + y(y')^2$; $y^2 = c_1(x + \frac{1}{4}c_1)$

22. $y' = 2\sqrt{|y|}$; $y = x|x|$

23. $y' - \dfrac{1}{x}y = 1$; $y = x \ln x, x > 0$

24. $\dfrac{dP}{dt} = P(a - bP)$; $P = \dfrac{ac_1e^{at}}{1 + bc_1e^{at}}$

25. $\dfrac{dX}{dt} = (2 - X)(1 - X)$; $\ln \dfrac{2 - X}{1 - X} = t$

26. $y' + 2xy = 1$; $y = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt + c_1e^{-x^2}$

27. $(x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$; $c_1(x + y)^2 = xe^{y/x}$

28. $y'' + y' - 12y = 0$; $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-4x}$

29. $y'' - 6y' + 13y = 0$; $y = e^{3x}\cos 2x$

30. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$; $y = e^{2x} + xe^{2x}$

31. $y'' = y$; $y = \cosh x + \operatorname{senh} x$

32. $y'' + 25y = 0$; $y = c_1 \cos 5x$

33. $y'' + (y')^2 = 0$; $y = \ln|x + c_1| + c_2$

34. $y'' + y = \tan x$; $y = -\cos x \ln(\sec x + \tan x)$

35. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} = 0$; $y = c_1 + c_2x^{-1}, x > 0$

36. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$; $y = x\cos(\ln x), x > 0$

37. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$; $y = x^2 + x^2 \ln x, x > 0$

38. $y''' - y'' + 9y' - 9y = 0$; $y = c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2 \cos 3x + 4e^x$

39. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$; $y = x^2e^x$

40. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 12x^2$; $y = c_1x + c_2x \ln x + 4x^2, x > 0$

En los problemas 41 y 42, compruebe que la función definida por tramos sea una solución de la ecuación diferencial dada.

41. $xy' - 2y = 0$; $y = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

42. $(y')^2 = 9xy$; $y = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$

43. Una familia monoparamétrica de soluciones de $y' = y^2 - 1$ es

$$y = \frac{1 + ce^{2x}}{1 - ce^{2x}}.$$

Determine por inspección una solución singular de esa ecuación diferencial.

44. En la página 5, que $y = \sqrt{4 - x^2}$ y $y = -\sqrt{4 - x^2}$ son soluciones de $dy/dx = -x/y$, en el intervalo $(-2, 2)$. Explique por qué

$$y = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2}, & -2 < x < 0 \\ -\sqrt{4 - x^2}, & 0 \le x < 2 \end{cases}$$

no es una solución de esa ecuación diferencial en el intervalo.

En los problemas 45 y 46, determine valores de m tales que $y = e^{mx}$ sea una solución de la ecuación diferencial respectiva.

45. $y'' - 5y' + 6y = 0$

46. $y'' + 10y' + 25y = 0$

En los problemas 47 y 48, determine los valores de m tales que $y = x^m$ sea una solución de la ecuación diferencial respectiva.

47. $x^2y'' - y = 0$

48. $x^2y'' + 6xy' + 4y = 0$

En los problemas 49 y 50 compruebe que cada par de funciones sea una solución del sistema respectivo de ecuaciones diferenciales.

49. $\dfrac{dx}{dt} = x + 3y$

$\dfrac{dy}{dt} = 5x + 3y;$

$x = e^{-2t} + 3e^{6t}, \quad y = -e^{-2t} + 5e^{6t}$

50. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 4y + e^t$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} = 4x - e^t;$

$x = \cos 2t + \operatorname{sen} 2t + \dfrac{1}{5}e^t, \quad y = -\cos 2t - \operatorname{sen} 2t - \dfrac{1}{5}e^t$

Problemas para discusión

51. a) Forme, cuando menos, dos ecuaciones diferenciales que no tengan soluciones reales.
b) Forme una ecuación diferencial cuya solución real única sea $y = 0$.

52. Suponga que $y = \phi(x)$ es una solución de una ecuación diferencial de orden n, $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, en un intervalo I. Explique por qué $\phi, \phi', \ldots, \phi^{(n-1)}$ deben ser continuas en I.

53. Suponga que $y = \phi(x)$ es una solución de una ecuación diferencial $dy/dx = y(a - by)$, donde a y b son constantes positivas.
a) Determine por inspección dos soluciones constantes de la ecuación.
b) Use sólo la ecuación diferencial para determinar en el eje y intervalos en que una solución $y = \phi(x)$ no constante sea decreciente y los intervalos en que $y = \phi(x)$ sea creciente.

c) Use sólo la ecuación diferencial, explique por qué y = $a/2b$ es la ordenada de un punto de inflexión de la gráfica para la solución y = $\phi(x)$ no constante.

d) En los mismos ejes coordenados trace las gráficas de las dos soluciones constantes que determinó en la parte b), y una gráfica de la solución no constante y = $\phi(x)$, cuya forma se sugirió en las partes b) y c).

54. La ecuación diferencial y = xy' + $f(y')$ se llama **ecuación de Clairaut.**

a) Derive ambos lados de esa ecuación con respecto a x para comprobar que la familia de rectas y = $cx + f(c)$, cuando c es una constante arbitraria, es una solución de la ecuación de Clairaut.

b) Con el procedimiento de la parte a), describa cómo se descubre en forma natural una solución singular de la ecuación de Clairaut.

c) Determine una familia monoparamétrica de soluciones y una solución singular de la ecuación diferencial y = xy' + $(y')^2$.

1.2 PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

■ *Problema de valor inicial* ■ *Condición inicial* ■ *Existencia y unicidad de una solución* ■ *Intervalo de existencia* ■ *Programas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias*

Problema de valor inicial A menudo nos interesa resolver una ecuación diferencial sujeta a condiciones prescritas, que son las condiciones que se imponen ay(x) o a sus derivadas. En algún intervalo Z que contenga a x_0, el problema

$$\begin{aligned} &\textit{Resolver:} && \frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \\ &\textbf{\textit{Sujeta}}\ \textit{a:} && y(x_0) = Yo,\ y'(x_0) = y_1,\ \ldots > y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \end{aligned} \tag{1}$$

en donde $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son constantes reales especificadas arbitrariamente, se llama **problema de valor inicial.** Los valores dados de la función desconocida, y(x), y de sus primeras $n - 1$ derivadas en un solo punto x_0: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)}$ se llaman **condiciones iniciales.**

Problemas de valor inicial de primero y segundo orden El problema enunciado con las ecuaciones (1) también se denomina **problema de valor inicial de enésimo orden;** por ejemplo,

$$\begin{aligned} &\textbf{\textit{Resolver:}} && \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ &\textit{Sujeta a:} && y(x_0) = y_0 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &\textbf{\textit{Resolver:}} && \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y') \\ &\textit{Sujeta a:} && y(x_0) = yo, \quad y'(x_0) = y_1 \end{aligned} \tag{3}$$

son problemas de valor inicial de primero y segundo orden, respectivamente. Son fáciles de interpretar en términos geométricos. Para las ecuaciones (2) estamos buscando una solución de la ecuación diferencial en un intervalo I que contenga a x_0, tal que una curva de solución pase por el punto prescrito (x_0, y_0) -Fig. 1.3.

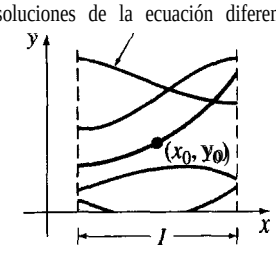


FIGURA 1.3 Problema de valor iniciol de primer orden

Para las ecuaciones (3), deseamos determinar una solución de la ecuación diferencial cuya gráfica no sólo pase por (x_0, y_0), sino que también pase por ese punto de tal manera que la pendiente de la curva en ese lugar sea y_1 (Fig. 1.4). El término *condición inicia2* procede de los sistemas físicos en que la variable independiente es el tiempo t y donde $y(t_0)$ = yo, y $y'(t_0) = y_1$ representan, respectivamente, la posición y la velocidad de un objeto en cierto momento o tiempo inicial t_0.

A menudo, la solución de un problema de valor inicial de orden n entraña la aplicación de una familia n-paramétrica de soluciones de la ecuación diferencial dada para determinar n constantes especializadas, de tal modo que la solución particular que resulte para la ecuación "se ajuste" (0 satisfaga) a las n condiciones iniciales.

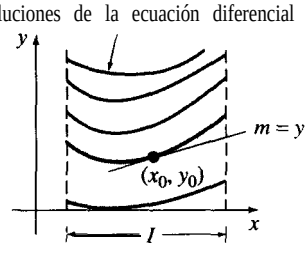


FIGURA 1.4 Problema de valor iniciol de segundo orden

EJEMPLO 1 **Problema de valor inicial de primer orden**

Se comprueba fácilmente que y = ce" es una familia monoparamétrica de soluciones de la ecuación $y' = y$, de primer orden, en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Si especificamos una condición inicial, por ejemplo, $y(0) = 3$, al sustituir $x = 0$, $y = 3$ en la familia, se determina la constante $3 = ce^0 = c$; por consiguiente, la función $y = 3e^x$ es una solución del problema de valor inicial

$$y' = y, \quad y(0) = 3.$$

Ahora bien, si pedimos que una solución de la ecuación diferencial pase por el punto (1, -2) y no por $(0, 3)$, entonces $y(1) = -2$ dará como resultado -2 = ce; o sea, c = $-2e^{-1}$. La función $y = -2e^{x-1}$ es una solución del problema de valor inicial

$$y' = y, \quad y(1) = -2.$$

En la figura 1.5 vemos las gráficas de esas dos funciones. ■

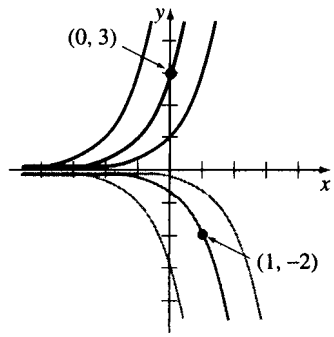


FIGURA 1.5 Soluciones de problemas de valor inicial

EJEMPLO 2 **Problema de valor inicial de segundo orden**

En el ejemplo 5 de la sección 1.1 vimos que $x = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t$ es una familia biparamétrica de soluciones de $x'' + 16x = 0$. Determinemos una solución del problema de valor inicial

$$x'' + 16x = 0, \qquad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2, \quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \tag{4}$$

SOLUCIÓN Primero sustituimos $x(\pi/2) = -2$ en la familia dada de soluciones: $c_1 \cos 2\pi + c_2 \operatorname{sen} 2\pi = -2$. Como $\cos 2\pi = 1$ y $\operatorname{sen} 2\pi = 0$, vemos que $c_1 = -2$. A continuación sustituimos $x'(\pi/2) = 1$ en la familia monoparamétrica $x(t) = -2 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t$. Primero derivamos y después igualamos $t = \pi/2$ y $x' = 1$, y obtenemos $8 \operatorname{sen} 2\pi + 4c_2 \cos 2\pi = 1$, con lo que vemos que $c_2 = \frac{1}{4}$; por lo tanto,

$$x = -2 \cos 4t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4t$$

es una solución de (4) ■

Existencia y unicidad Al resolver un problema de valor inicial surgen dos asuntos fundamentales:

¿Existe una solución al problema? Si la hay, ¿es única?

Para un problema de valor inicial, como el de las ecuaciones (2), lo que se pregunta es:

Existencia	Unicidad
¿La ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$ tiene soluciones? ¿Alguna de las curvas solución pasa por el punto (x_0, y_0)?	¿Cuándopcdemos estar seguros de que hay precisamente una curva solución que pasa por el punto (x_0, y_0)?

Nótese que en los ejemplos 1 y 2, empleamos la frase *"una* solución" y no *"la* solución" del problema. El artículo indefinido se usa deliberadamente para indicar la posibilidad de que existan otras soluciones. Hasta ahora no hemos demostrado que haya una solución única para cada problema. El ejemplo siguiente es de un problema de valor inicial con dos soluciones.

EJEMPLO 3 **Un problema de valor inicial puede tener varias soluciones**

Ambas funciones $y = 0$ y $y = x^4/16$ satisfacen la ecuación diferencial $dy/dx = xy^{\frac{1}{2}}$, y la condición inicial $y(0) = 0$, de modo que el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}, \qquad y(0) = 0$$

tiene dos soluciones cuando menos. Como vemos en la figura 1.6, las gráficas de ambas funciones pasan por el mismo punto, $(0, 0)$. ■

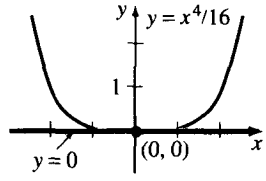


FIGURA 1.6 Dos soluciones del mismo problema de valor inicial

Dentro de los confines seguros de un curso formal de ecuaciones diferenciales, se puede asumir, que ***la mayor parte*** de las ecuaciones diferenciales tienen soluciones y que las soluciones de los problemas de valor inicial ***probablemente sean*** únicas. Sm embargo, en la vida real las cosas no son tan idílicas. Por consiguiente, antes de resolver un problema de valor inicial es preferible conocer, si existe una solución y, cuando exista, si es la única. Puesto que vamos a manejar ecuaciones diferenciales de primer orden en los dos capítulos siguientes, enunciaremos aquí, sin demostrarlo, un teorema que define las condiciones suficientes para garantizar la existencia y unicidad de una solución a un problema de valor inicial de primer orden, para ecuaciones que tengan la forma de las ecuaciones (2). Sólo hasta el capítulo 4 examinaremos la existencia y unicidad de un problema de valor inicial de segundo orden.

TEOREMA 1.1 **Existencia de una solución única**

Sea R una región rectangular del plano xy, definida por $a \le x \le b, c \le y \le d$, que contiene al punto (x_0, y_a). Si $f(x, y)$ y $\partial f/\partial y$ son continuas en R, entonces existe un intervalo I, centrado en x_0, y una función única, $y(x)$ definida en I, que satisface el problema de valor inicial expresado por las ecuaciones (2).

El resultado anterior es uno de los teoremas más comunes de existencia y unicidad para ecuaciones de primer orden, ya que es bastante fácil comprobar los criterios de continuidad de $f(x, y)$ y $\partial f/\partial y$. En la figura 1.7 podemos ver la interpretación geométrica del teorema 1.1.

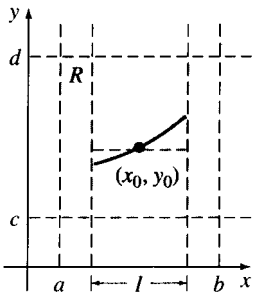


FIGURA 1.7 Región rectangular R

EJEMPLO 4 **Regreso al ejemplo 3**

En el ejemplo anterior vimos que la ecuación diferencial $dy/dx = xy^{1/2}$ tiene cuando menos dos soluciones cuyas gráficas pasan por $(0, 0)$. Al examinar las funciones

$$f(x, y) = xy^{1/2} \qquad \textbf{Y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2y^{1/2}}$$

se advierte que son continuas en el semiplano superior definido por $y > 0$; por consiguiente, el teorema 1.1 permite llegar a la conclusión de que para cada punto (x_0, y_0), $y_0 > 0$ de ese semiplano, hay un intervalo centrado en x_0 en que la ecuación diferencial tiene una solución única. Así, por ejemplo, sin resolverla, sabemos que existe un intervalo centrado en 2 en que el problema de valor inicial $dy/dx = xy^{1/2}$, $y(2) = 1$, tiene una solución ímica. ■

El teorema 1.1 garantiza que, en el ejemplo 1, no hay otras soluciones de los problemas de valor inicial $y' = y$, $y(0) = 3$ y $y' = y$, $y(1) = -2$, aparte de $y = 3e^x$ y $y = -2e^{x-1}$, respectivamente. Esto es consecuencia de que $f(x, y) = y$ y $\partial f/\partial y = 1$ sean continuas en todo el plano xy. También se puede demostrar que el intervalo en que está definida cada solución es $(-\infty, \infty)$.

EJEMPLO 5 **Intervalo de existencia**

En la ecuación $dy/dx = x^2 + y^2$, vemos que $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $\partial f/\partial y = 2y$ son ambas polinomios en x y y, por consiguiente, continuas en cualquier punto. En otras palabras, la región R del teorema 1.1 es todo el plano xy; en consecuencia, por cada punto dado (x_0, y_0) pasa una y sólo una curva de solución. Sin embargo, observemos que esto no significa que el intervalo máximo I de validez de una solución de un problema de valor inicial sea, necesariamente, $(-\infty, \infty)$. El intervalo I no necesita ser tan amplio como la región R. En general, no es posible hallar un intervalo específico I en que se defina una solución sin resolver la ecuación diferencial (consulte los problemas 18, 19 y 29, en los ejercicios 1.2). ■

Utilerías para solución de ecuaciones ordinarias Es posible llegar a una representación gráfica ***aproximada*** de una solución de una ecuación o sistema de ecuaciones diferenciales sin tener que obtener una solución explícita o implícita. Para tener esa representación gráfica se necesitan programas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (***ODE solver***). En el caso de una ecuación diferencial de primer orden como $dy/dx = f(x, y)$,

basta dar $f(x, y)$ y especificar un valor inicial $y(x_0) = y_0$. Si el problema tiene una solución, el programa presenta la curva de solución;* por ejemplo, según el teorema 1 .1 tenemos la seguridad de que la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -y + \operatorname{sen} x$$

sólo tiene una solución que pasa por cada punto (x_0, y_0) del plano xy. La figura 1.8 muestra las curvas de solución generadas con un programa para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias que pasan por (-2.5, 1), (-1, −1), (0, 0), (0, 3), (0, −1), (1, 1), (1, -2) y (2.5, -2.5).

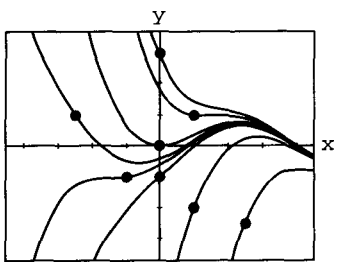


FIGURA 1.8 Algunas soluciones de y' = −y + sen x

Observaciones

i) El lector debe estar consciente de la diferencia entre afirmar que ***una solución existe y*** presentar ***una solución.*** Es claro que si llegamos a una solución proponiéndola, podemos decir que existe; pero una solución puede existir sin que podamos presentarla. En otras palabras, cuando decimos que una ecuación diferencial tiene solución, esto no significa también que exista un método para llegara ella. Una ecuación diferencial puede tener una solución que satisfaga las condiciones iniciales especificadas, pero quizá lo mejor que podamos hacer sea aproximarla. En el capítulo 9 describiremos los métodos de aproximación para las ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales que forman la teoría en que se basan los programas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarios.

ii) Las condiciones del teorema 1.1 son suficientes pero no necesarias. Cuando $f(x, y)$ y $\partial f/\partial y$ son continuas en una región R rectangular, siempre se debe concluir que existe una solución de las ecuaciones como las representados en (2), y que es única, siempre que (x_0, y_0) sea un punto interior de R. Sin embargo, si no son válidas las condiciones descritas en la hipótesis del teorema 1.1, puede suceder cualquier cosa: que el problema (2) siga teniendo uno solución y que esa solución sea única, o que el problema (2) tenga varias soluciones 0 ninguna.

EJERCICIOS 1.2

En los problemas 1 a 10, determine una región del plano xy para la cual la ecuación diferencial dada tenga una solución única que pase por un punto (x_0, y_0) en la región.

*De aquí en adelante el lector debe recordar que una curva de solución generada por estos programas es ***aproximada***.

1. $\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$

2. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$

3. $x\frac{dy}{dx} = y$

4. $\frac{dy}{dx} - y = x$

5. $(4 - y^2)y' = x^2$

6. $(1 + y^3)y' = x^2$

7. $(x^2 + y^2)y' = y^2$

8. $(y - x)y' = y + x$

9. $\frac{dy}{dx} = x^3 \cos y$

10. $\frac{dy}{dx} = (x - 1)e^{y/(x-1)}$

En los problemas 11 y 12 determine por inspección al menos dos soluciones del problema de valor inicial respectivo.

11. $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$

12. $x\frac{dy}{dx} = 2y$, $y(0) = 0$

En los problemas 13 a 16 determine si el teorema 1.1 garantiza que la ecuación diferencial $y' = \sqrt{y^2 - 9}$ tiene una solución única que pase por el punto dado.

13. (1, 4)

14. (5, 3)

15. (2, -3)

16. (-1, 1)

17. a) Determine por inspección una familia monoparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $xy' = y$. Compruebe que cada miembro de la familia sea una solución del problema de valor inicial $xy' = y$, $y(0) = 0$.

b) Explique la parte a) determinando una región R del plano xy, para la que la ecuación diferencial $xy' = y$ tenga solución única que pase por un punto (x_0, y_0) de R.

c) Compruebe que la función definida por tramos

$$y = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

satisfaga la condición $y(0) = 0$. Determine si la función también es una solución del problema de valor inicial en la parte a).

18. a) Para la ecuación diferencial $y' = 1 + y^2$, determine una región R, del plano xy, para la cual la ecuación diferencial tenga solución única que pase por un punto (x_0, y_0) en R.

b) Demuestre que $y = \tan x$ satisface la ecuación diferencial y la condición $y(0) = 0$; pero explique por qué no es solución del problema de valor inicial $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$ en el intervalo $(-2, 2)$.

c) Determine el mayor intervalo I de validez, para el que $y = \tan x$ sea una solución del problema de valor inicial en la parte b).

19. a) Compruebe que la ecuación diferencial $y' = y^2$ tiene solución única que pasa por cualquier punto (x_0, y_0) del plano xy.

b) Con un programa *ODE solver* obtenga la curva de solución que pasa por cada uno de los siguientes puntos: (0, 0), (0, 2), (1, 3), (−2, 4), (0, -1.5) y (1, -1) con una utileria.

c) Use las gráficas que obtuvo en la parte b) a fin de conjeturar el intervalo I máximo de validez para la solución de cada uno de los siete problemas de valor inicial.

20. a) Para la ecuación diferencial $y' = x/y$ determine una región R del plano xy para la cual la ecuación diferencial tenga solución única que pase por un punto (x_0, y_0) en R.

b) Use un programa *ODE solver* para determinar las curvas de solución de varios problemas de valor inicial para (x_0, y_0) en R.

c) Con los resultados de la parte b), conjeture una familia monoparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial.

En los problemas 21 y 22 utilice el hecho de que $y = 1/(1 + c_1 e^{-x})$ es una familia monoparamétrica de soluciones de $y' = y - y^2$, para determinar una solución del problema de valor inicial formado por la ecuación diferencial y la condición inicial dada.

21. $y(0) = -\frac{1}{3}$ **22.** $y(-1) = 2$

En los problemas 23 a 26 use el hecho de que $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ es una familia biparamétrica de soluciones de $y'' - y = 0$, para llegar a una solución del problema de valor inicial formado por la ecuación diferencial y las condiciones iniciales dadas.

23. $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ 24. $y(1) = 0$, $y'(1) = e$

25. $y(-1) = 5$, $y'(-1) = -5$ **26.** $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

Problemas para discusión

27. Suponga que $f(x, y)$ satisface las hipótesis del teorema 1.1 en una región rectangular, R, del plano xy. Explique por que dos soluciones distintas de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ no se pueden intersectar ni ser tangentes entre sí en un punto (x_0, y_a) en R.

28. El teorema 1.1 garantiza que sólo hay una solución de la ecuación diferencial $y' = 3y^{4/3}$ cos x que pase por cualquier punto (x_0, y_0) especificado en el plano xy. El intervalo de existencia de una solución depende de la condición inicial $y(x_0) = y_0$. Use la famila monoparamétrica de soluciones $y = 1/(c - \text{sen } x)^3$ para determinar una solución que satisfaga $y(\pi) = 1/8$. Determine una solución que satisfaga $y(\pi) = 8$. Con esas dos soluciones forme una base para razonar sobre las siguientes preguntas: a partir de la familia de soluciones dada, ¿cuándo cree que el intervalo de existencia del problema de valor inicial sea un intervalo finito? ¿Cuándo es un intervalo infinito?

1.3 LAS ECUACIONES DIFERENCIALES COMO MODELOS MATEMÁTICOS

■ *Modelo matemático* ■ *Nivel de resolución de un modelo* ■ *Segunda ley de Newton del movimiento* ■ *Segunda ley de Kirchhoff* ■ *Sistema dinámico* ■ *Variables de estado* ■ *Estado de un sistema* ■ *Respuesta de un sistema*

Nota para el profesor En esta sección nos concentraremos en la formulación de ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos. Una vez examinados algunos métodos para resolver ecuaciones diferenciales, en los capítulos 2 y 4, regresaremos y resolveremos algunos de esos modelos en los capítulos 3 y 5.

Modelo matemático Con frecuencia se desea describir el comportamiento de algún sistema o fenómeno de la vida real en términos matemáticos; dicho sistema puede ser físico,

sociológico o hasta económico. La descripción matemática de un sistema o fenómeno se llama **modelo matemático** y se forma con ciertos objetivos en mente; por ejemplo, podríamos tratar de comprender los mecanismos de cierto ecosistema estudiando el crecimiento de las poblaciones de animales, o podríamos tratar de fechar fósiles analizando la desintegración de una sustancia radiactiva, sea en el fósil o en el estrato donde se encontraba.

La formulación de un modelo matemático de un sistema se inicia:

i) ***Mediante la identificación de las variables causantes del cambio del sistema. Podremos elegir no incorporar todas las variables en el modelo desde el comienzo. En este paso especificamos el nivel de resolución del modelo.***

A continuación,

ii) ***Se establece un conjunto de hipótesis razonables acerca del sistema que tratamos de describir Esas hipótesis también incluyen todas las leyes empíricas aplicables al sistema.***

Para algunos fines quizá baste contar con modelos de baja resolución; por ejemplo, en los cursos básicos de física el lector habrá advertido que al modelar el movimiento de un cuerpo que cae cerca de la superficie de la Tierra, se hace caso omiso de la resistencia del aire. Pero si el lector es un científico cuyo objeto es predecir con exactitud la trayectoria de vuelo de un proyectil de largo alcance, deberá tener en cuenta la resistencia del aire y demás factores, como la curvatura de la Tierra.

Dado que las hipótesis acerca de un sistema implican con frecuencia la ***razón o tasa de cambio*** de una o más de las variables, el enunciado metemático de todas esas hipótesis es una o más ecuaciones donde intervienen ***derivadas.*** En otras palabras, el modelo matemático es una ecuación o sistema de ecuaciones diferenciales.

Una vez formulado un modelo matemático (sea una ecuación diferencial o un sistema de ellas), llegamos al problema de resolverlo, que no es fácil en modo alguno. Una vez resuelto, comprobamos que el modelo sea razonable si su solución es consistente con los datos experimentales o los hechos conocidos acerca del comportamiento del sistema. Si las predicciones que se basan en la solución son deficientes, podemos aumentar el nivel de resolución del modelo o elaborar hipótesis alternativas sobre los mecanismos del cambio del sistema; entonces, se repiten los pasos del proceso de modelado (Fig. 1.9). Al aumentar la resolución, aumentamos la complejidad del modelo matemático y la probabilidad de que debamos conformarnos con una solución aproximada.

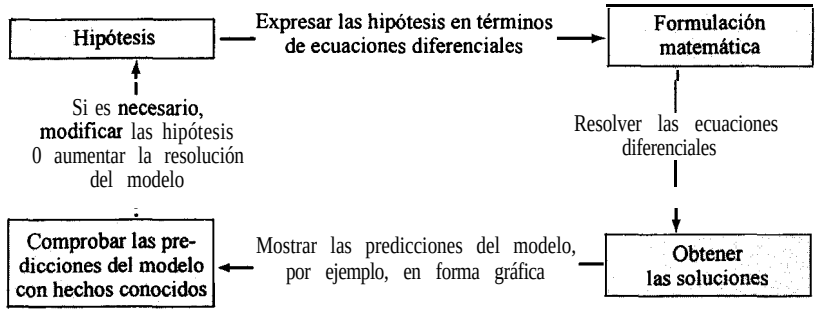


FIGURA 1.9

Con frecuencia, el modelo matemático de un **sistema *físico*** inducirá la variable t, el tiempo. En este caso, una solución del modelo expresa el **estado del sistema;** en otras palabras, para valores adecuados de t, los valores de la o las variables dependientes describen el sistema en el pasado, presente y futuro.

Crecimiento y decaimiento Uno de los primeros intentos de modelar matemáticamente el **crecimiento demográfico** humano lo hizo Thomas Malthus, economista inglés en 1798. En esencia, la idea del modelo malthusiano es la hipótesis de que la tasa de crecimiento de la población de un país crece en forma proporcional a la población total, $P(t)$, de ese país en cualquier momento t. En otras palabras, mientras más personas haya en el momento t, habrá más en el futuro. En términos matemáticos, esta hipótesis se puede expresar

$$\frac{dP}{dt} \propto P \qquad \text{o sea} \qquad \frac{dP}{dt} = kP, \tag{1}$$

donde k es una constante de proporcionalidad. A pesar de que este sencillo modelo no tiene en cuenta muchos factores (por ejemplo, inmigración y emigración) que pueden influir en las poblaciones humanas, haciéndolas crecer o disminuir, predijo con mucha exactitud la población de Estados Unidos desde 1790 hasta 1860. La ecuación diferencial (1) aún se utiliza con mucha frecuencia para modelar poblaciones de bacterias y de animales pequeños durante cortos intervalos.

El núcleo de un átomo está formado por combinaciones de protones y neutrones. Muchas de esas combinaciones son inestables; esto es, los átomos se desintegran, o se convierten en átomos de otras sustancias. Se dice que estos núcleos son radiactivos; por ejemplo, con el tiempo, el radio Ra 226, intensamente radiactivo, se transforma ***en*** gas radón, Rn 222, también radiactivo. Para modelar el fenómeno de la desintegración radiactiva, se supone que la tasa con que los núcleos de una sustancia se desintegran (decaen) es proporcional a la cantidad (con más precisión, el número) de núcleos, $A(t)$, de la sustancia que queda cuando el tiempo es t (o en el momento t):

$$\frac{dA}{dt} \propto A \qquad \text{o sea} \qquad \frac{dA}{dt} = kA. \tag{2}$$

Por supuesto que las ecuaciones (1) y (2) son exactamente iguales; la diferencia radica en la interpretación de los símbolos y de las constantes de proporcionalidad. En el caso del crecimiento, como cabe esperar en (1), $k > 0$, y en el caso de la desintegración, en (2), $k < 0$. El modelo de desintegración (2) también se aplica a sistemas biológicos; por ejemplo, la determinación de la "vida media" o "periodo medio" de una medicina. Nos referimos al tiempo que tarda el organismo en eliminar 50% de ella, sea por excreción o metabolización.

Veremos el mismo modelo básico de (1) y (2) en un sistema económico.

Capitalización continua del interés El interés que gana una cuenta de ahorros, a menudo se ***capitaliza o se compone*** trimestralmente o hasta mensualmente. No hay razón para detenerse en esos intervalos; el interés también podría componerse cada día, hora, minuto, segundo, medio segundo, microsegundo, etcétera; es decir, se podría componer **continuamente.** Para modelar el concepto de la composición continua del interés supongamos que $S(t)$ es la cantidad de dinero acumulada en una cuenta de ahorros al cabo de t años, y que r es la tasa de interés anual, compuesto continuamente. Si $h > 0$ representa un incremento en el tiempo, el

interés que se obtiene en el intervalo $(t + h) - t$ es igual a la diferencia entre las cantidades acumuladas:

$$S(t + h) - S(t). \tag{3}$$

Dado que el interés está definido por (tasa) x (tiempo) x (capital inicial), podemos determinar el interés ganado en ese mismo intervalo mediante

$$rhS(t), \text{ o también mediante } rhS(t + h). \tag{4}$$

Vemos intuitivamente que las cantidades en (4) son las cotas inferior y superior, respectivamente, del interés real en la expresión (3); esto es,

$$rhS(t) \le S(t + h) - S(t) \le rhS(t + h)$$

o sea

$$rS(t) \le \frac{S(t + h) - S(t)}{h} \le rS(t + h). \tag{5}$$

Como queremos que h sea cada vez menos, podemos tomar el límite de (5) cuando $h \to 0$:

$$rS(t) \le \lim_{h \to 0} \frac{S(t + h) - S(t)}{h} \le rS(t).$$

Y de este modo se debe cumplir

$$\lim_{h \to 0} \frac{S(t + h) - S(t)}{h} = rS(t) \qquad \text{o sea} \qquad \frac{dS}{dt} = rS. \tag{6}$$

Lo esencial de haber escrito las ecuaciones (1), (2) y (6) en este ejemplo es:

Una sola ecuación diferencial puede ser modelo matemático de muchos fenómenos distintos.

Con frecuencia, los modelos matemáticos se acompañan de condiciones definitorias; por ejemplo, en las ecuaciones (1), (2) y (6) cabría esperar conocer una población inicial, Po, una cantidad inicial de sustancia, A_0, disponible, y un saldo inicial, S_0, respectivamente. Si el tiempo inicial se define como $t = 0$, sabemos que P(O) = P_0, que A(O) = A_0 y que $S(0) = S_0$. En otras palabras, un modelo matemático está formado por un problema de valor inicial, o también (como veremos en la sección 5.2) por un problema de valores en la frontera.

Reacciones químicas La desintegración de una sustancia radiactiva, caracterizada por la ecuación diferencial (1), es una **reacción de primer orden.** En química hay algunas reacciones que se apegan a la siguiente ley empírica: si las moléculas de la sustancia A se descomponen y forman moléculas más pequeñas, es natural suponer que la rapidez con que se lleva a cabo esa descomposición es proporcional a la cantidad de la sustancia A que no ha sufrido la conversión; esto es, si X(r) es la cantidad de la sustancia A que queda en cualquier momento, entonces $dX/dt = kX$, donde k es una constante negativa (porque X es decreciente). Un ejemplo de una reacción química de primer orden es la conversión del cloruro de t-butilo (cloruro de terbutilo) para formar alcohol t-butílico:

$$(CH_3)_3CCl + NaOH \rightarrow (CH_3)_3COH + NaCl$$

La rapidez de la reacción está determinada tan sólo por la concentración del cloruro de terbutilo. Ahora bien, en la reacción

$$CH_3Cl + NaOH \rightarrow CH_3OH + NaCl,$$

por cada molécula de cloruro de metilo se consume una molécula de hidróxido de sodio para formar una molécula de alcohol metílico y una de cloruro de sodio. En este caso, la razón con que avanza la reacción es proporcional al producto de las concentraciones de CH_3Cl y $NaOH$ que quedan. Si X representa la cantidad de CH_3OH que se forma, y a y b son las cantidades dadas de las dos primeras sustancias, A y B, las cantidades instantáneas que no se han convertido en C son $\alpha - X$ y $\beta - X$, respectivamente; por lo tanto, la razón de formación de C está expresada por

$$\frac{dX}{dt} = k(\alpha - X)(\beta - X), \tag{7}$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Una reacción cuyo modelo es la ecuación (7) se denomina **reacción de segundo orden.**

Diseminación de una enfermedad Cuando se analiza la diseminación de una enfermedad contagiosa -la gripe, por ejemplo-, es razonable suponer que la tasa o razón con que se difunde no sólo es proporcional a la cantidad de personas, x(r), que la han contraído en el momento t, sino también a la cantidad de sujetos, y(t), que no han sido expuestos todavía al contagio. Si la tasa es dx/dt, entonces

$$\frac{dx}{dt} = kxy, \tag{8}$$

donde k es la acostumbrada constante de proporcionalidad. Si, por ejemplo, se introduce una persona infectada en una población constante de n personas, entonces x y y se relacionan mediante $x + y = n + 1$. Usamos esta ecuación para eliminar y en la ecuación (8) y obtenemos el modelo

$$\frac{dx}{dt} = kx(n + 1 - x) \tag{9}$$

Una condición inicial obvia que acompaña a la ecuación (9) es $x(0) = 1$.

Ley de Newton del enfriamiento Según la ley empírica de Newton acerca del enfriamiento, la rapidez con que se enfría un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que le rodea, que es la temperatura ambiente. Si $T(t)$ representa la temperatura del objeto en el momento t, T_m es la temperatura constante del medio que lo rodea y dT/dt es la rapidez con que se enfría el objeto, la ley de Newton del enfriamiento se traduce en el enunciado matemático

$$\frac{dT}{dt} \propto T - T_m \quad \text{o sea} \quad \frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \tag{10}$$

en donde k es una constante de proporcionalidad. Como supusimos que el objeto se enfría, se debe cumplir que $T > T_m$; en consecuencia, lo lógico es que $k < 0$.

Mezclado Al mezclar dos soluciones salinas de distintas concentraciones se da pie a una ecuación diferencial de primer orden, que define la cantidad de sal que contiene la mezcla. Supongamos que un tanque mezclador grande contiene 300 galones de agua, en donde se ha disuelto sal. Otra solución de salmuera se bombea al tanque a una tasa de 3 galones por minuto. El contenido se agita perfectamente, y es desalojado a la misma tasa (Fig. 1.10). Si la concentración de la solución que entra es 2 libras/galón, hay que formar un modelo de la cantidad de sal en el tanque en cualquier momento.

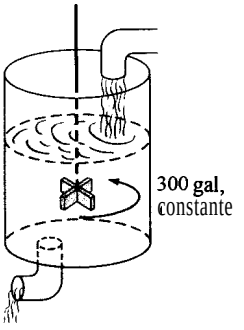


FIGURA 1.10

Sea A(t) la cantidad de sal (en libras) en el tanque en cualquier momento t. En este caso, la rapidez con que cambia A(r) es la tasa neta:

$$\frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix}\text{tasa de entrada}\\ \text{de la sustancia}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{tasa de salida}\\ \text{de la sustancia}\end{pmatrix} = R_1 - R_2 \tag{11}$$

Ahora bien, la razón, R_1, con que entra la sal al tanque, en lb/min, es

$$R_1 = (3\ \text{gal/min})\,.\,(2\ \text{lb/gal}) = 6\ \text{lb/min},$$

mientras que la razón, R_2, con que sale la sal es

$$R_2 = (3\ \text{gal/min})\,.\left(\frac{A}{300}\ \text{lb/gal}\right) = \frac{A}{100}\ \text{lb/min}.$$

Entonces, la ecuación (ll) se transforma en

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100}. \tag{12}$$

Vaciado de un tanque En hidrodinámica, la ley de Torricelli establece que la velocidad v de eflujo (o salida) del agua a través de un agujero de bordes agudos en el fondo de un tanque lleno con agua hasta una altura (o profundidad) h es igual a la velocidad de un objeto (en este

caso una gota de agua), *que* cae libremente desde una altura h; esto es, $v = \sqrt{2gh}$, donde g es la aceleración de la gravedad. Esta última expresión se origina al igualar la energía cinética, $\frac{1}{2}mv^2$, con la energía potencial, ***mgh,*** despejando v. Supongamos que un tanque lleno de agua se deja vaciar por un agujero, por la acción de la gravedad. Queremos determinar la profundidad, ***h,*** del agua que queda en el tanque (Fig. 1. ll) en el momento ***t.***

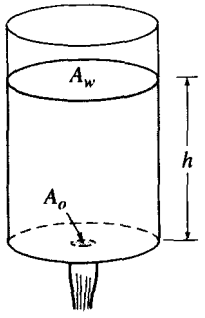


FIGURA 1.11

Si el área transversal del agujero es A_0, en pies cuadrados, y la velocidad del agua que sale del tanque es $v = \sqrt{2gh}$, en pies por segundo, el volumen de agua que sale del tanque, por segundo, es $A_0\sqrt{2gh}$, en pies cúbicos por segundo. Así, si $V(t)$ representa al volumen del agua en el tanque en cualquier momento t,

$$\frac{dV}{df} = -A_o\sqrt{2gh}, \tag{13}$$

donde el signo menos indica que V está disminuyendo. Obsérvese que no tenemos en cuenta la posibilidad de **fricción** en el agujero, que podría causar una reducción de la tasa de flujo. Si el tanque es tal que el volumen del agua en cualquier momento t se expresa como $V(f) = A_w\ h$, donde A_w son los pies cuadrados (ft^2) de área *constante* del espejo (la superficie superior) del agua (Fig. 1.1 1), $dV/dt = A_w\ dh/df$. Sustituimos esta última expresión en la ecuación (13) y llegamos a la ecuación diferencial que deseábamos para expresar la altura del agua en cualquier momento *f:*

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{}{A_w}\ q\ \ l\ . \tag{14}$$

Es interesante observar que la ecuación (14) es válida aun cuando A_w no sea constante. En este caso, debemos expresar el área del espejo del agua en función de h: $A_w = A(h)$.

Segunda ley de Newton del movimiento Para establecer un modelo matemático del movimiento de un cuerpo dentro de un campo de fuerzas, con frecuencia se comienza con la segunda ley de Newton. Recordemos que en **física** elemental, la **primera ley del movimiento** de Newton establece que un cuerpo quedará en reposo o continuará moviéndose con velocidad constante, a menos que sea sometido a una fuerza externa. En los dos casos, esto equivale a decir que cuando la suma de las fuerzas ΣF_k —o sea, la fuerza *neta* o resukante- que actúan sobre el cuerpo es cero, la **aceleración** a del cuerpo **es** cero. La **segunda ley del movimiento** de Newton indica que cuando la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo no es cero, la fuerza neta es proporcional a su aceleración a; con más propiedad, $\Sigma F_k = ma$, donde m es la masa del cuerpo.

Caída libre Supongamos ahora que se arroja una piedra hacia arriba, desde la azotea de un edificio. ¿Cuál es su posición en el momento t? Como se ve en la figura 1.12, consideremos que su posición respecto al suelo es s(t). La aceleración de la piedra es la segunda derivada, d^2s/dt^2. Si suponemos que la dirección hacia arriba es positiva, que la masa de la piedra es m y que no hay otra fuerza, además de la de la gravedad (g), actuando sobre la piedra, la segunda ley de Newton establece que

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg \qquad \text{o sea} \quad -\frac{d^2s}{dt^2} = g. \tag{15}$$

Donde g es la aceleración de la gravedad y mg es el peso de la piedra. Se usa el signo menos porque el peso de la piedra es una fuerza que se dirige hacia abajo, opuesta a la dirección positiva. Si la altura del edificio es s_0 y la velocidad inicial de la piedra es v_0, s queda determinada mediante el problema de valor inicial

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g, \qquad s(0) = s_0, \quad s'(0) = v_0. \tag{16}$$

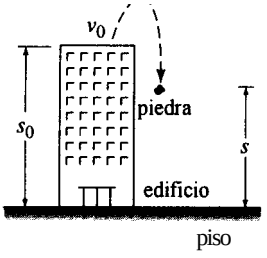


FIGURA 1.12

Aunque no hemos estudiado las soluciones de las ecuaciones que hemos formulado, vemos que la ecuación (16) se puede resolver integrando dos veces la constante -g con respecto a t. Las condiciones iniciales determinan las dos constantes de integración.

Caída de los cuerpos y resistencia del aire En ciertas circunstancias, un cuerpo que cae, de masa m, se encuentra con una resistencia del aire que es proporcional a su velocidad instantánea, v. En este caso, si consideramos que la dirección positiva es hacia abajo, la fuerza neta que actúa sobre la masa es $mg - kv$, en que el peso, mg, del cuerpo es una fuerza que actúa en dirección positiva y la resistencia del aire, en dirección contraria -esto es, hacia arriba— o dirección positiva. Ahora bien, como v se relaciona con la aceleración a mediante $a = dv/dt$, la segunda ley de Newton se enuncia como $F = ma = m\,dv/dt$. Al igualar la fuerza neta con esta forma de la segunda ley, obtenemos una ecuación diferencial de la velocidad del cuerpo en cualquier momento:

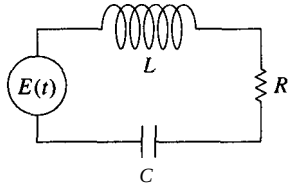
$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv. \tag{17}$$

En este caso, k es una constante de proporcionalidad positiva.

Circuitos en serie Examinemos el circuito en serie simple que contiene un inductor, un resistor y un capacitor (Fig. 1.13). En un circuito con el interruptor cerrado, la corriente se representa con i(r) y la carga en el capacitor, cuando el tiempo es t, la corriente I se denota con $q(t)$. Las letras L, C y R son constantes denominadas inductancia, capacitancia y resistencia, respectivamente. Según la segunda ley de Kirchhoff, el voltaje $E(t)$ a través de un circuito cerrado debe ser igual a las caídas de voltaje en el mismo. La figura 1.13 también muestra los símbolos y fórmulas de las caídas respectivas de voltaje a través de un inductor, un capacitor y un resistor. Como la corriente i(t) se relaciona con la carga $q(t)$ en el capacitor mediante $i = dq/dt$, sumamos las caídas de voltaje

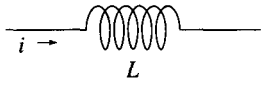
$$\text{inductor} = L\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\text{resistor} = iR = R\frac{dq}{dt}$$

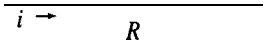


(a)

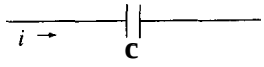
Inductor:
inductancia L: henries (h)
caída de voltaje: $L\frac{di}{dt}$



Resistor:
resistencia *R: ohms* (Ω)
caída de voltaje: iR



Capacitor:
capacitancia C: farads. (f)
caída de voltajes: $\frac{1}{C}q$



(b)

FIGURA 1.13

$$\text{capacitor} = \frac{1}{C}q$$

e igualamos la suma al voltaje total para llegar a la ecuación diferencial de segundo orden

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{18}$$

En la sección 5.1 examinaremos con detalle una ecuación diferencial análoga a la (18).

Observación

Cada ejemplo de esta sección describió un sistema dinámico; esto es, uno que cambia o evoluciona al paso del tiempo t. Como el estudio de los sistemas dinámicos es una rama de las matemáticas de moda en la actualidad, a veces usaremos la terminología de esa rama con nuestras descripciones.

En términos más precisos, un sistema dinámico consiste en un conjunto de variables dependientes del tiempo, que se llaman variables de estado, más una regla que permite determinar (sin ambigüedades) el estado del sistema (que puede ser pasado, presente o futuro) en términos de un estado especificado en cierto momento t_0. Los sistemas dinámicos se clasifican como sistemas discretos o continuos en el tiempo, o de tiempos discretos o continuos. En este libro sólo nos ocuparemos de los sistemas dinámicos continuos en el tiempo, que son aquellos en que *todas* las variables están definidas dentro de un intervalo continuo de tiempo. La regla o modelo matemático en un sistema de éstos es una ecuación o sistema de ecuaciones diferenciales. El estado del sistema en el momento t es el valor de las variables de estado en ese instante; el estado especificado del sistema en el instante t_0 es, tan sólo, el conjunto de condiciones iniciales que acompañan al modelo matemático. La solución de un problema de valor inicial se llama respuesta del sistema; por ejemplo, en el caso de la desintegración radiactiva, la regla es $dA/dt = kA$. Ahora, si se conoce la cantidad de sustancia radiactiva en cierto instante t_0, y es, por ejemplo, $A(t_0) = A_0$, entonces, al resolver la regla se ve que la respuesta del sistema cuando $t \geq t_0$ es $A(t) = A_0e^{(t-t_0)}$ (Sec. 3.1). Esta solución es única y $A(t)$ es la variable única de estado para este sistema. En el caso de la piedra arrojada desde la azotea de un edificio, la respuesta del sistema es la solución a la ecuación diferencial $d^2s/dt^2 = -g$, sujeta al estado inicial $s(0) = s_0$, $s'(0) = v_0$, y es la conocida fórmula $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$, $0 \leq t \leq T$, en donde T representa el valor del tiempo en que la piedra llega al suelo. Las variables de estado son $s(t)$ y $s'(t)$, la posición y la velocidad verticales de la piedra, respectivamente. Obsérvese que la aceleración, $s''(t)$, no es una variable de estado parque basta conocer cualquier posición y velocidad iniciales en el momento t_0 para determinar, en forma única, la posición, $s(t)$, y la velocidad, $s'(t) = v(t)$, de la piedra en cualquier momento del intervalo $t_0 \leq t \leq T$. La aceleración, $s''(t) = a(t)$, en cualquier momento está definida por la ecuación diferencial $s''(t) = -g$, $0 < t < T$.

Ultima observación: no todo sistema que se estudia en este libro es un sistema dinámico. También revisaremos algunos sistemas estáticos en que el modelo es una ecuación diferencial.

EJERCICIOS 1.3

1. Con base en las hipótesis del modelo de la ecuación (1), determine una ecuación diferencial que describa la población, $P(t)$, de un país, cuando se permite una inmigración de tasa constante r.

2. El modelo descrito por (1) no tiene en cuenta la tasa de mortalidad; esto es, el crecimiento demográfico es igual a la tasa de natalidad. En otro modelo de población variable en una comunidad se supone que la tasa de cambio de la población es una tasa neta; o sea, la diferencia entre la tasa de natalidad y la de mortalidad. Formule una ecuación diferencial que describa la población $P(t)$, si las tasas de natalidad y mortalidad son proporcionales a la población presente en cualquier momento t.
3. Una medicina se inyecta en el torrente sanguíneo de un paciente a un flujo constante de r g/s. Al mismo tiempo, esa medicina desaparece con una razón proporcional a la cantidad $x(t)$ presente en cualquier momento t. Formule una ecuación diferencial que describa la cantidad $x(t)$.
4. En el momento $t = 0$, se introduce una innovación tecnológica en una comunidad de n personas, cantidad fija. Proponga una ecuación diferencial que describa la cantidad de individuos, $x(t)$, que hayan adoptado la innovación en cualquier momento t.
5. Suponga que un tanque grande de mezclado contiene 300 galones de agua en un inicio, en los que se disolvieron 50 libras de sal. Al tanque entra agua pura con un flujo de 3 gal/min y, con el tanque bien agitado, sale el mismo flujo. Deduzca una ecuación diferencial que exprese la cantidad $A(t)$ de sal que hay en el tanque cuando el tiempo es t.
6. Suponga que un tanque grande de mezclado contiene al principio 300 galones de agua, en los que se han disuelto 50 lb de sal. Al tanque entra otra salmuera a un flujo de 3 gal/min y, estando bien mezclado el contenido del tanque, salen *tan sólo* 2 gal/min. Si la concentración de la solución que entra es 2 lb/gal, deduzca una ecuación diferencial que exprese la cantidad de sal, A(r), que hay en el tanque cuando el tiempo es t.
7. Por un agujero circular de área A_0, en el fondo de un tanque, sale agua. Debido a la fricción y a la contracción de la corriente cerca del agujero, el flujo de agua, por segundo, se reduce a $cA_0\sqrt{2gh}$, donde $0 < c < 1$. Deduzca una ecuación diferencial que exprese la altura h del agua en cualquier momento t, que hay en el tanque cúbico de la figura 1.14. El radio del agujero es 2 in y g = 32 ft/s^2.

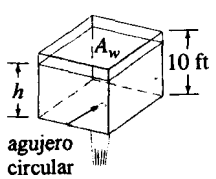


FIGURA 1.14

8. Un tanque tiene la forma de cilindro circular recto, de 2 ft de radio y 10 ft de altura, parado sobre una de sus bases. Al principio, el tanque está lleno de agua y ésta sale por un agujero circular de $\frac{1}{2}$ in de radio en el fondo. Con la información del problema 7, formule una ecuación diferencial que exprese la altura h del agua en cualquier momento t.
9. Un circuito en serie tiene un resistor y un inductor (Fig. 1.15). Formule una ecuación diferencial para calcular la corriente $i(t)$, si la resistencia es R, la inductancia es L y el voltaje aplicado es $E(t)$.
10. Un circuito en serie contiene un resistor y un capacitor (Fig. 1.16). Establezca una ecuación diferencial que exprese la carga $q(t)$ en el capacitor, si la resistencia es R, la capacitancia es C y el voltaje aplicado es $E(t)$.

11. En la teoría del aprendizaje, se supone que la rapidez con que se memoriza algo es proporcional a la cantidad que que& por memorizar. Suponga que Mrepresenta la cantidad

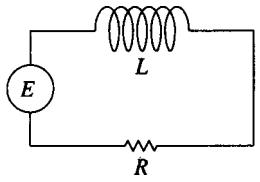


FIGURA 1.15

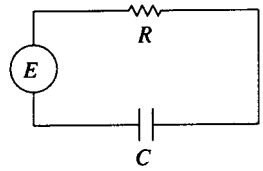


FIGURA 1.16

total de un tema que se debe memorizar y que A(t) es la cantidad memorizada cuando el tiempo es t. Deduzca una ecuación diferencial para determinar la cantidad A(r).

12. Con los datos del problema anterior suponga que la cantidad de material olvidado es proporcional a la cantidad que se **memorizó** cuando el tiempo es t. Formule una ecuación diferencial para A(t), que tome en cuenta los olvidos.
13. Una persona P parte del origen y se mueve en la dirección positiva del eje x, tirando de una carga que se mueve a lo largo de la curva C. Esa curva se llama **tractriz** (Fig. 1.17). La carga, que al principio se hallaba en el eje y, en (0, s), está en el extremo de la cuerda de longitud constantes, que se mantiene tensa durante el movimiento. Deduzca la ecuación diferencial para definir la trayectoria del movimiento (o sea, la ecuación de la tractriz). Suponga que la cuerda siempre es tangente a C.
14. Cuando un cuerpo -como el del paracaidista que se ve en la figura 1.18 antes de que se abra el **paracaídas**— se mueve a gran velocidad en el aire, la resistencia del mismo se describe mejor con la velocidad instantánea elevada a cierta potencia. Formule una ecuación diferencial que relacione la velocidad $v(t)$ de un cuerpo de masa m que cae, si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea.

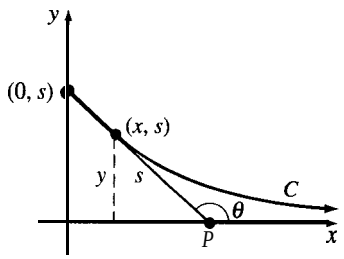


FIGURA 1.17

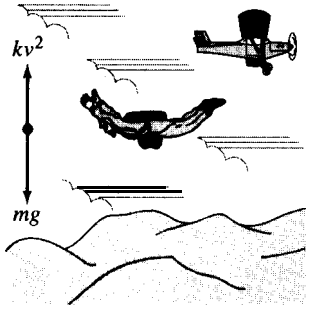


FIGURA 1.18

15. Cuando se fija una masa m a un resorte, éste se estira s unidades y cuelga en reposo en la posición de equilibrio que muestra la figura 1.19b). Al poner en movimiento el sistema resorte y masa, sea $x(t)$ la distancia dirigida desde el punto de equilibrio hasta la masa. Suponga que la dirección hacia abajo es positiva y que el movimiento se efectúa en una línea recta vertical que pasa por el centro de gravedad de la masa. También suponga que las únicas fuerzas que actúan sobre el sistema son el peso mg de la masa y la fuerza de restauración del resorte alargado que, según la ley de Hooke, es proporcional a su alargamiento total. Deduzca una ecuación diferencial del deplazamiento x(t) en cualquier momento t.

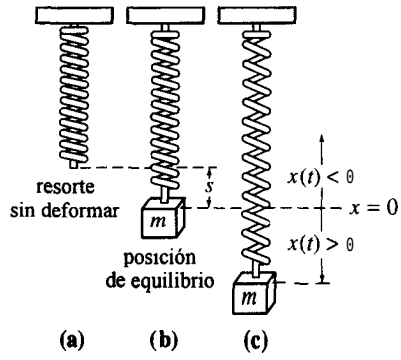


FIGURA 1.19

16. En el agua Bota un barril cilíndrico de s ft de diámetro y w Ib de peso. Después de un hundimiento inicial, su movimiento es oscilatorio, hacia arriba y hacia abajo, en línea vertical. Guiándose por la figura 1.20b), deduzca una ecuación diferencial para determinar el desplazamiento vertical $y(t)$, si se supone que el origen esta en el eje vertical y en la superficie del agua cuando el barril esta en reposo. Use el principio de Arquimedes, el cual dice que la fuerza de flotación que ejerce el agua sobre el barril es igual al peso del agua que desplaza éste. Suponga que la dirección hacia abajo es positiva, que la densidad del agua es 62.4 lb/ft^3 y que no hay resistencia entre el barril y el agua.
17. Como vemos en la figura 1.21, los rayos luminosos chocan con una curva C en el plano, de tal manera que todos los rayos L paralelos al eje x se reflejan y van a un punto único, 0. Suponga que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión y deduzca una ecuación diferencia1 que describa la forma de la curva C. [Sugerencia: al examinar la figura vemos que se puede escribir $\phi = 28$. ¿Por qué? A continuación use la identidad trigonomb trica adecuada.]

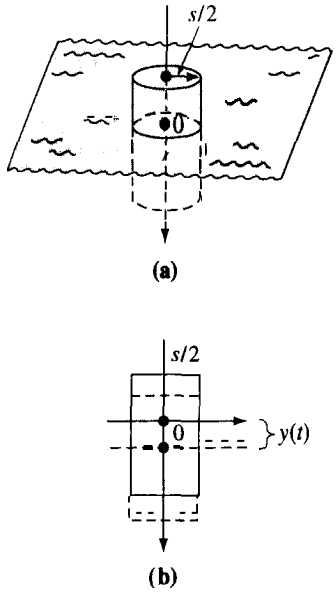


FIGURA 1.20

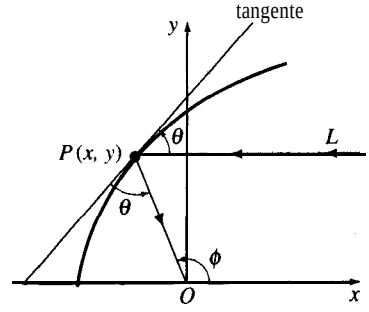


FIGURA 1.21

Problemas para discusión

18. La ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = (k \cos t)\, P,$$

en que k es una constante positiva, modela la población humana, $P(t)$, de cierta comunidad. Proponga una interpretación de la solución de esta ecuación; en otras palabras, ¿qué tipo de población (en cuanto a cantidad) describe esta ecuación diferencial?

19. Una gran bola de nieve tiene forma de esfera. A partir de determinado momento, que podemos identificar como $t = 0$, comienza a fundirse. Para fines de discusión, suponga que la fusión es de tal manera que la forma permanece esférica. Comente las cantidades que cambian con el tiempo durante la fusión. Describa una interpretación de la "fusión" como una rapidez. Si es posible, formule un modelo matemático que describa el estado de la bola de nieve en cualquier momento $t > 0$.

20. A continuación veamos otro problema con la nieve: el "problema del quitanieves". Se trata de un clásico que aparece en muchos textos de ecuaciones diferenciales y fue inventado por Ralph Palmer Agnew.

Un día comenzó a nevar en forma intensa y constante. Un quitanieves comenzó a medio día, y avanzó 2 millas la primera hora y 1 milla la segunda. ¿A qué hora comenzó a nevar?

El problema se encuentra en *Differential Equations*, por Ralph Palmer Agnew (McGraw-Hill Book Co.). Describa la construcción y solución del modelo matemático.

21. Suponga que se perfora un agujero que pasa por el centro de la Tierra y que por él se deja caer un objeto de masa m (Fig. 1.22). Describa el posible movimiento de la masa. Formule un modelo matemático que lo describa. Sea r la distancia del centro de la Tierra a la masa, en el momento t, y Mla masa de la Tierra. Sea M_r la masa de la parte de la Tierra que está dentro de una esfera de radio r, y sea δ la densidad constante de la Tierra.

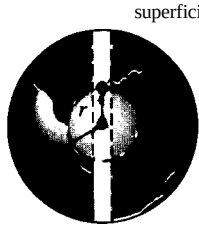


FIGURA 1.22

22. Una taza de café se enfría obedeciendo a la ley de Newton del enfriamiento (Ec. 10). Con los datos de la gráfica de la temperatura $T(t)$, figura 1.23, calcule T_m, T_0 y k, con un modelo de la forma

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \qquad T(0) = T_0.$$

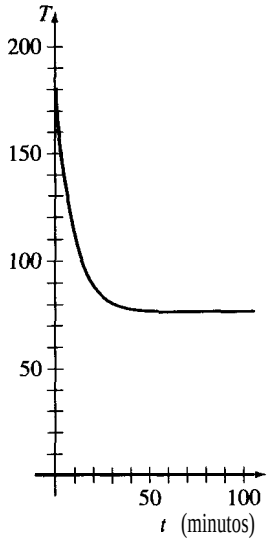


FIGURA 1.23

Ejercicios de repaso

Sin consultar el texto, conteste los problemas 1 a 4. Llene el espacio en blanco o conteste cierto/falso.

1. La ecuación diferencial y' = $1/(25 - x^2 - y^2)$ tiene solución única que pasa por cualquier punto (x_0, y_0) en la o las regiones definidas por _____.
2. El problema de valor inicial xy' = $3y$, y(O) = 0 tiene las soluciones $y = x^3$ y _____.
3. El problema de valor inicial $y' = y^{1/2}, y(0) = 0$ no tiene solución, porque $\partial f/\partial y$ es discontinua en la recta y = 0. _____
4. Existe un intervalo centrado en 2, en que la solución única del problema de valor inicial $y' = (y - 1)^3, y(2) = 1$ es $y = 1$. _____

En los problemas 5 a 8 mencione el tipo y el orden de la ecuación diferencial respectiva. En las ecuaciones diferenciales ordinarias mencione si son lineales o no.

5. $(2xy - y')\,dx + e^x\,dy = 0$

6. $(\operatorname{sen} xy)y''' + 4xy' = 0$

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$

8. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3x\dfrac{dy}{dx} + y = x^2$

En los problemas 9 a 12 compruebe que la función indicada sea una solución de la ecuación diferencial respectiva.

9. $y' + 2xy = 2 + x^2 + y^2;\quad y = x + \tan x, -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

10. $x^2y'' - xy' + y = 0;\quad y = c_1\cos(\ln x) + c_2\operatorname{sen}(\ln x),\ x > 0$

11. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 6;\quad y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x} + 3$

12. $y^{(4)} - 16y = 0;\quad y = \operatorname{sen} 2x + \cosh 2x$

En los problemas 13 a 20, determine por inspección al menos una solución de la ecuación diferencial dada.

13. $y' = 2x$

14. $\frac{dy}{dx} = 5y$

15. $y'' = 1$

16. $y' = y^3 - 8$

17. $y'' = y'$

18. $2y\frac{dy}{dx} = 1$

19. $y'' = -y$

20. $y'' = y$

21. Determine un intervalo en el cual $y^2 - 2y = x^2 - x - 1$ defina una solución de $2(y - 1)dy + (1 - 2x)dx = 0$.

22. Explique por qué la ecuación diferencial

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{4 - y^2}{4 - x^2}$$

no tiene soluciones reales cuando $|x| < 2$, $|y| > 2$. ¿Hay otras regiones del plano xy donde la ecuación no tenga soluciones?

23. El tanque cónico de la figura 1.24 pierde el agua que sale de un agujero en su fondo. Si el área transversal del agujero es $\frac{1}{4}$ de ft^2, defina una ecuación diferencial que represente la altura h del agua en cualquier momento. No tenga en cuenta la fricción ni la contracción del chorro de agua en el agujero.

24. Un peso de 96 lb resbala pendiente abajo de un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Si el coeficiente de fricción dinámica es μ, deduzca una ecuación diferencial para la velocidad, v(t), del peso en cualquier momento. Aplique el hecho de que la fuerza de fricción que se opone al movimiento es μN, donde N es la componente del peso normal al plano inclinado (Fig. 1.25).

25. De acuerdo con la ley de Newton de la gravitación universal, la aceleración a de caída libre de un cuerpo (como el satélite de la figura 1.26) que cae una gran distancia hacia la superficie no es la constante g. Más bien, esa aceleración, que llamaremos a, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r al centro de la Tierra, $a = k/r^2$, donde k es la constante de proporcionalidad.

a) Emplee el hecho de que en la superficie de la Tierra, $r = R$ y $a = g$, para determinar la constante de proporcionalidad k.

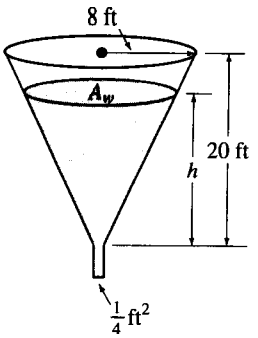


FIGURA 1.24

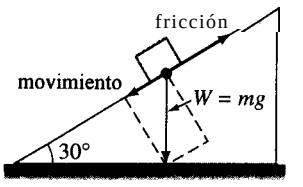


FIGURA 1.25

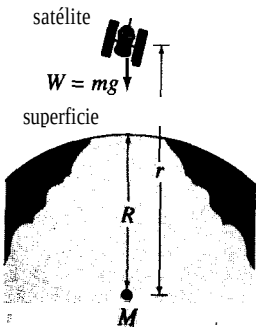


FIGURA 1.26

b) Aplique la segunda ley de Newton y el resultado de la parte a) para deducir una ecuación diferencial para la distancia r.

c) Aplique la regla de la cadena en la forma

$$\frac{d^2r_E}{d?} \quad \frac{d}{dt} \quad v_z \quad \frac{dv}{dr} \quad \frac{dr}{dt}$$

para expresar la ecuación diferencial de la parte b) en forma de una ecuación diferencial donde intervengan v y dv/dr.

CAPÍTULO

2

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

2.1 Variables separables
2.2 Ecuaciones exactas
2.3 Ecuaciones lineales
2.4 Soluciones por sustitución
Ejercicios de repaso

INTRODUCCIÓN

Ya podemos resolver algunas ecuaciones diferenciales. Comenzaremos con las de primer orden y veremos cómo hacerlo; el método dependerá del tipo de ecuación. A través de los años, los matemáticos han tratado de resolver muchas ecuaciones especializadas. Por ello hay muchos métodos; sin embargo, lo que funciona bien con un tipo de ecuación de primer orden no necesariamente se aplica a otros. En este capítulo nos concentraremos en tres tipos de ecuaciones de primer orden.

2.1 VARIABLES SEPARABLES

- *Solución por integración* ■ *Definición de una ecuación diferencial separable*
- *Método de solución* ■ *Pérdida de una solución* ■ *Formas alternativas*

Nota

Con frecuencia, para resolver las ecuaciones dikrenciales se tendrá que integrar y quizá la integración requiera alguna técnica especial. Convendrá emplear algunos minutos en un repaso del texto de cálculo, o si se dispone de un SAC {sistema algebraico de computación: *computer algebra system*), repasar la sintaxis de los comandos para llevar a cabo las integraciones básicas por partes o fracciones parciales.

Solución por integración Comenzaremos nuestro estudio de la metodología para resolver ecuaciones de primer orden, $dy/dx = f(x, y)$, con la más sencilla de todas las ecuaciones diferenciales. Cuandofes independiente de la variable y -esto es, cuando $f(x, y) = g(x)$- la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{1}$$

se puede resolver por integración. Si $g(x)$ es una función continua, al integrar ambos lados de (1) se llega a la solución

$$y = \int g(x)\, dx = G(x) + c,$$

en donde $G(x)$ es una antiderivada (o integral indefinida) de g(x); por ejemplo,

$$\text{Si} \quad \frac{dy}{dx} = 1 + e^{2x} \text{ entonces} \quad y = \int (1 + e^{2x})\, dx = x + \frac{1}{2} e^{2x} + c.$$

La ecuación (1), y su método de solución, no son más que un caso especial en que f, en $dy/dx = f(x, y)$ es un producto de una función de x por una función dey.

DEFINICIÓN 2.1 Ecuación separable

Se dice que una ecuación diferencial de primer orden, de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\, h(y)$$

es separable, o de variables separables.

Obsérvese que al dividir entre la función $h(y)$, una ecuación separable se puede escribir en la forma

$$p(y)\frac{dy}{dx} = g(x), \tag{2}$$

donde, por comodidad, p(y) representa a $1/h(y)$. Así podemos ver de inmediato que la ecuación (2) se reduce a la ecuación (1) cuando h(y) = 1.

Ahora bien, si $y = \phi(x)$ representa una solución de (2), se debe cumplir

$$\int p(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int g(x)\,dx. \tag{3}$$

Pero $dy = \phi'(x)\,dx$, de modo que la ecuación (3) es lo mismo que

$$\int p(y)\,dy = \int g(x)\,dx \qquad \text{o} \qquad \mathbf{H(y)} = G(x) + c, \tag{4}$$

en donde H(y) y $G(x)$ son **antiderivadas** de $p(y) = 1/h(y)$ y de g(x), respectivamente.

Método de solución La ecuación (4) indica el procedimiento para resolver las ecuaciones separables. Al integrar ambos lados de $p(y)\,dy = g(x)\,dx$ se obtiene una familia monoparamétrica de soluciones, que casi siempre se expresa de manera implícita.

Nota

Na hay necesidad de emplear dos constantes cuando se integra una ecuación separable, porque si escribimos $H(y) + c_1 = G(x) + c_2$, la diferencia $c_2 - c_1$ se puede reemplazar con una sola constante c, como en la ecuación (4). En muchos casos de los capítulos siguientes, sustituiremos las constantes en la forma más conveniente para determinada ecuación; por ejemplo, a veces se pueden reemplazar los múltiplos o las combinaciones de constantes con una sola constante.

EJEMPLO 1 Solución de una ecuación diferencial separable

Resolver $(1 + x)\,dy - y\,dx = 0$.

SOLUCIÓN Dividimos entre $(1 + x)y$ y escribimos $dy/y = dx/(1 + x)$, de donde

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{1+x} \\
\ln|y| &= \ln|1+x| + c_1 \\
y &= e^{\ln|1+x| + c_1} \\
&= e^{\ln|1+x|} \cdot e^{c_1} && \leftarrow \text{leyes de los exponentes} \\
&= |1+x|e^{c_1} \\
&= \pm e^{c_1}(1+x). && \leftarrow \begin{cases} |1+x| = 1+x, & x \geq -1 \\ |1+x| = -(1+x), & x < -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Definimos c como $\pm e^{c_1}$, con lo que llegamos ay = $c(1 + x)$.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA Como cada integral da como resultado un logaritmo, la elección más prudente de la constante de integración es $\ln|c|$, en lugar de c:

$$\ln|y| = \ln|1 + x| + \ln|c|, \quad \text{o bien} \quad \ln|y| = \ln|c(1 + x)|,$$

y entonces $$y = c(1 + x).$$

Aun cuando no *todas* las integrales indefinidas sean logaritmos, podría seguir siendo más conveniente usar $\ln|c|$. Sin embargo, no se puede establecer una regla invariable. ■

EJEMPLO 2 Problema de valor inicial

Resolver el problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, y(4) = 3.$

SOLUCIÓN Partimos de $y\,dy = -x\,dx$ para obtener

$$\int y\,dy = -\int x\,dx \qquad y \qquad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c_1.$$

Esta solución se puede escribir en la forma $x^2 + y^2 = c^2$, si sustituimos la constante $2c_1$ con c^2. Vemos que la solución representa una familia de círculos concéntricos.

Cuando $x = 4$, $y = 3$, de modo que $16 + 9 = 25 = c^2$. Así, el problema de valor inicial determina que $x^2 + y^2 = 25$. De acuerdo con el teorema 1.1, podemos concluir que, es el ímico círculo de la familia que pasa por el punto $(4, 3)$ (Fig. 2.1). ■

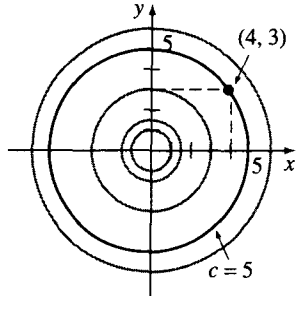


FIGURA 2.1

Se debe tener cuidado al separar las variables porque los divisores variables podrían ser cero en algún punto. Como veremos en los dos ejemplos siguientes, en ocasiones se puede perder una solución constante mientras resolvemos un problema. Consúltese también el problema 58, en los ejercicios 2.1.

EJEMPLO 3 Pérdida de una solución

Resolver $xy^4\,dx + (y^2 + 2)e^{-3x}dy = 0.$ **(5)**

SOLUCIÓN Al multiplicar la ecuación por e^{3x} y dividirla entre y^4 obtenemos

división término a término $\rightarrow$ $xe^{3x}\,dx + \dfrac{y^2+2}{y^4}\,dy = 0$ o sea $xe^{3x}\,dx + (y^{-2} + 2y^{-4})\,dy = 0,$ **(6)**

En el primer término integramos por partes y

$$\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} - y^{-1} - \frac{2}{3}y^{-3} = c_1.$$

La familia monoparamétrica de soluciones también se puede escribir en la forma

$$e^{3x}(3x - 1) = \frac{9}{y} + \frac{6}{y^3} + c, \tag{7}$$

en donde c sustituyó a la constante $9c_1$. Obsérvese que $y = 0$ es una solución correcta de la ecuación (5), pero no es un miembro del conjunto de soluciones que define la ecuación (7). ■

EJEMPLO 4 Problema de valor inicial

Resolver el problema de valor inicial $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 4$, $y(0) = -2$.

SOLUCIÓN Pasamos la ecuación a la forma

$$\frac{dy}{y^2 - 4} = dx \tag{8}$$

y empleamos el método de fracciones parciales en el lado izquierdo. Entonces

$$\left[\frac{-1/4}{y+2} + \frac{1/4}{y-2}\right] dy = dx \tag{9}$$

de modo que

$$-\frac{1}{4}\ln|y+2| + \frac{1}{4}\ln|y-2| = x + c_1. \tag{10}$$

En este caso es fácil despejar y de la ecuación implícita en función de x. Al multiplicar la ecuación por 4 y combinar logaritmos resulta

$$\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = 4x + c_2 \qquad \text{y así} \qquad \frac{y-2}{y+2} = ce^{4x}.$$

Hemos reemplazado $4c_1$ con c_2, y e^{c_2} con c. Por último, despejamos y de la última ecuación y obtenemos

$$y = 2\frac{1 + ce^{4x}}{1 - ce^{4x}}. \tag{11}$$

Si sustituimos $x = 0$ y $y = -2$, se presenta el dilema matemático

$$-2 = 2\frac{1+c}{1-c} \text{ o bien-l + c = 1 + c o bien-l = 1.}$$

Al llegar a la ultima igualdad vemos que debemos examinar con más cuidado la ecuación diferencial. El hecho es que la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = (y + 2)(y - 2)$$

queda satisfecha con dos funciones constantes, que son y = -2 y y = 2. Al revisar las ecuaciones **(8),** (9) y (10) advertimos que debemos excluir ay = -2 y y = 2 de esos pasos de **la** solución. Es interesante observar que después podemos recuperar la solución y = 2 si hacemos que c = 0 en la ecuación (ll). Sin embargo, no hay valor finito de c que pueda producir la solución y = -2. Esta última función constante es la única solución al problema de valor inicial (Fig. 2.2). ■

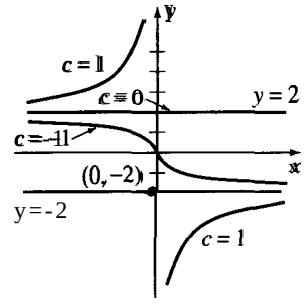


FIGURA 2.2

Si en el ejemplo 4 hubiéramos empleado $\ln|c|$ como constante de integración, la forma de la familia monoparamétrica de soluciones sería

$$y = 2\frac{c + e^{4x}}{c - e^{4x}}. \tag{12}$$

Obsérvese que la ecuación (12) se reduce ay = -2 cuando c = 0; pero en este caso no hay valor finito de c que pueda dar como resultado la solución constante y = 2.

Si al determinar un valor específico del parámetro c en una familia de soluciones de una ecuación diferencial de primer orden llegamos a una solución particular, la mayoría de los estudiantes (y de los profesores) tenderá a descansar satisfechos. Pero en la sección 1.2 vimos que una solución de un problema de valor inicial quizá no sera única; por ejemplo, en el ejemplo 3 de esa sección el problema

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}, \quad y(0) = 0 \tag{13}$$

tiene dos soluciones cuando menos, las cuales son $y = 0$ y $y = x^4/16$. Ahora ya podemos resolver esa ecuación. Si separamos variables obtenemos

$$y^{-1/2}\,dy = x\,dx,$$

que al integrar da

$$2y^{1/2} = \frac{x^2}{2} + c_1 \quad \text{o sea} \quad y = \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2.$$

Cuando x = 0, y = 0, así que necesariamente c = 0; por lo tanto, $y = x^4/16$. Se perdió la solución y = 0 al dividir entre $y^{1/2}$. Además, el problema de valor inicial, ecuación **(13),** tiene una cantidad infinitamente mayor de soluciones porque por cada elección del parámetro $a \geq 0$ la función definida en secciones

$$y = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{(x^2 - a^2)^2}{16}, & x \geq a \end{cases}$$

satisface al mismo tiempo la ecuación diferencial y la condición inicial (Fig. 2.3).

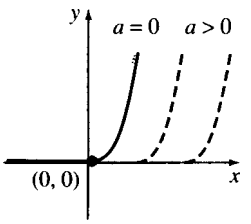


FIGURA 2.3

Observación

En algunos de los ejemplos anteriores vimos que la constante de la familia **monoparamétrica** de soluciones de una ecuación diferencial de primer orden se puede redefinir para mayor comodidad. También se puede dar con facilidad el caso de que dos personas lleguen a expresiones distintas de las mismas respuestas al resolver en forma correcta la misma ecuación; por ejemplo, separando variables se puede demostrar que familias monoparamétricas de soluciones de $(1 + y^2)\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$ son

$$\arctan x + \arctan y = c \quad \text{o bien} \quad \frac{x + y}{1 - xy} = c.$$

Al avanzar en las siguientes secciones, el lector debe tener en cuenta que las familias de soluciones pueden ser equivalentes, en el sentido de que una se puede obtener de otra, ya sea por **redefinición** de la constante o por transformaciones algebraicas o trigonométricas.

EJERCICIOS 2.1

En los problemas 1 a 40 resuelva la ecuación diferencial respectiva por separación de variables.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} 5x$

2. $\dfrac{dy}{dx} = (x + 1)^2$

3. $dx + e^{3x}\,dy = 0$

4. $dx - x^2\,dy = 0$

5. $(x + 1)\dfrac{dy}{dx} = x + 6$

6. $e^x \dfrac{dy}{dx} = 2x$

7. $xy' = 4y$

8. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 0$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3}{x^2}$

10. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+1}{x}$

11. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x^2y^2}{1+x}$

12. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1+2y^2}{y \operatorname{sen} x}$

13. $\dfrac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$

14. $e^x y\,\dfrac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$

15. $(4y + yx^2)\,dy - (2x + xy^2)\,dx = 0$

16. $(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)\,dy = y^2\,dx$

17. $2y(x + 1)\,dy = x\,dx$

18. $x^2y^2\,dy = (y + 1)\,dx$

19. $y \ln x \dfrac{dx}{dy} = \left(\dfrac{y+1}{x}\right)^2$

20. $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{2y+3}{4x+5}\right)^2$

21. $\dfrac{dS}{dr} = kS$

22. $\dfrac{dQ}{dt} = k(Q - 70)$

23. $\dfrac{dP}{dt} = P - P^2$

24. $\dfrac{dN}{dt} + N = Nte^{t+2}$

25. $\sec^2 x\,dy + \csc y\,dx = 0$

24. $\operatorname{sen} 3x\,dx + 2y \cos^3 3x\,dy = 0$

27. $e^y \operatorname{sen} 2x\,dx + \cos x(e^{2y} - y)\,dy = 0$

28. $\sec x\,dy = x \cot y\,dx$

29. $(e^y + 1)^2 e^{-y}\,dx + (e^x + 1)^3 e^{-x}\,dy = 0$

30. $\dfrac{y}{x}\dfrac{dy}{dx} = (1 + x^2)^{-1/2}(1 + y^2)^{1/2}$

31. $(y - yx^2)\dfrac{dy}{dx} = (y + 1)^2$

32. $2\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{2x}{y}$

33. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$

34. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - 3}$

35. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x(\cos 2y - \cos^2 y)$

36. $\sec y\,\dfrac{dy}{dx} + \operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}(x + y)$

37. $x\sqrt{1 - y^2}\,dx = dy$

38. $y(4 - x^2)^{1/2}\,dy = (4 + y^2)^{1/2}\,dx$

39. $(e^x + e^{-x})\dfrac{dy}{dx} = y^2$

40. $(x + \sqrt{x})\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{y}$

En los problemas 41 a 48 resuelva la ecuación diferencial, sujeta a la condición inicia) respectiva.

41. $(e^{-y} + 1)\ \text{sen}\ x\ dx = (1 + \cos x)\ dy, \quad y(0) = 0$

42. $(1 + x^4)\ dy + x(1 + 4y^2)\ dx = 0, \quad y(1) = 0$

43. $y\ dy = 4x(y^2 + 1)^{1/2}\ dx, \quad y(0) = 1$

44. $\dfrac{dy}{dt} + ty = y, \quad y(1) = 3$

45. $\dfrac{dx}{dy} = 4(x^2 + 1), \quad x\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

46. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - 1}{x^2 - 1}, \quad y(2) = 2$

47. $x^2y' = y - xy, \quad y(-1) = -1$

48. $y' + 2y = 1, \quad y(0) = \frac{5}{2}$

En los problemas 49 y 50 determine una solución de la ecuación diferencial dada que pase por los puntos indicados.

49. $\dfrac{dy}{dx} - y^2 = -9$

(a) (0, 0) **(b)** (0, 3) **(c)** $\left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$

50. $x\dfrac{dy}{dx} = y^2 - y$

(a) (0, 1) **(b)** (0, 0) **(c)** $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

51. Determine una solución singular de la ecuación en el problema 37.
52. Halle una solución singular de la ecuación en el problema 39.

Con frecuencia, un cambio radical en la solución de una ecuación diferencial corresponde a un cambio muy pequeño en la condición inicial o en la ecuación misma. En los problemas 53 a 56 compare las soluciones de los problemas de valor inicial respectivos.

53. $\dfrac{dy}{dx} = (y - 1)^2, \quad y(0) = 1$

54. $\dfrac{dy}{dx} = (y - 1)^2, \quad y(0) = 1.01$

55. $\dfrac{dy}{dx} = (y - 1)^2 + 0.01, \quad y(0) = 1$

56. $\dfrac{dy}{dx} = (y - 1)^2 - 0.01, \quad y(0) = 1$

Problemas para discusión

57. Antes de discutir las dos partes de este problema, analice el teorema 1.1 y la definición de una solución implícita.
    a) Determine una solución *explícita* del problema de valor inicial $dy/dx = -x/y$, $y(4) = 3$. **Defina** el máximo intervalo, I, de validez de esta solución. (Véase el ejemplo 2.)
    b) ¿**Cree** que $x^2 + y^2 = 1$ es una solución ***implícita*** del problema de valor inicial $dy/dx = -x/y$, $y(1) = 0$?
58. Se tiene la forma general $dy/dx = g(x)h(y)$, de una ecuación diferencial separable de primer orden. Si r es un número tal que $h(r) = 0$, explique por qué $y = r$ debe ser una solución constante de la ecuación.

2.2 ECUACIONES EXACTAS

■ *Diferencial exacta* ■ *Definición de una ecuación diferencial exacta* ■ *Método de solución*

La sencilla ecuación y dx + x dy = 0 es separable, pero también equivale a la diferencial del producto de x por y; esto es,

$$y\,dx + x\,dy = d(xy) = 0.$$

Al integrar obtenemos de inmediato la solución implícita xy = c.

En cálculo diferencial, el lector debe recordar que si $z = f(x, y)$ es una función con primeras derivabas parciales continuas en una región R del plano xy, su diferencial (que también se llama la diferencial total) es

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{1}$$

Entonces, si $f(x, y) = c$, de acuerdo con (1),

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0. \tag{2}$$

En otras palabras, dada una familia de curvas $f(x, y) = c$, podemos generar una ecuación diferencial de primer orden si calculamos la diferencial total; por ejemplo, si $x^2 - 5xy + y^3 = c$, de acuerdo con la ecuación (2)

$$(2x - 5y)\,dx + (-5x + 3y^2)\,dy = 0 \quad \text{o sea} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{5y - 2x}{-5x + 3y^2}.$$

Para nuestros fines, es más importante darle vuelta al problema, o sea: dada una ecuación como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5y - 2x}{-5x + 3y^2}, \tag{3}$$

¿podemos demostrar que la ecuación equivale a

$$d(x^2 - 5xy + y^3) = 0?$$

2 DEFINICIÓN 2.1 ón exacta

Una ecuación diferencial $M(x, y) + N(x, y)$ **es una diferencial exacta en una región** R **del** plano xy si corresponde a la diferencial **de alguna función** $f(x, y)$. **Una ecuación diferencial** de primer orden de la forma

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

es una ecuación diferencial exacta (diferencial exacta o ecuación exacta), si la expresión del lado izquierdo es una diferencial exacta.

EJEMPLO 1 **Ecuación diferencial exacta**

La ecuación $x^2y^3\,dx + x^3y^2\,dy = 0$ es exacta, porque

$$d\left(\frac{1}{3}x^3y^3\right) = x^2y^3\,dx + x^3y^2\,dy.$$

■

Obsérvese que, en este ejemplo, si $M(x, y) = x^2y^3$ y $N(x, y) = x^3y^2$, entonces $\partial M/\partial y = 3x^2y^2 = \partial N/\partial x$. El teorema 2.1 indica que esta igualdad de derivadas parciales no es una casualidad.

TEOREMA 2.1 **Criterio para una ecuación diferencial exacta**

Sean continuas $M(x, y)$ y $N(x, y)$, con derivadas parciales **continuas en** una región **rectangular, R, definida** por $a < x < b$, $c < y < d$. Entonces, la **condición** necesaria y suficiente **para que** $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ sea una diferencial exacta es que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{4}$$

DEMOSTRACIÓN DE IA NECESIDAD Para simplificar supongamos que $M(x, y)$ y $N(x, y)$ tienen primeras derivadas parciales continuas en toda (x, y). Si la expresión $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ es exacta, existe una **función** f **tal** que, para todo x de R,

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

En consecuencia

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y},$$

y

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

La igualdad de las derivadas parciales mixtas es consecuencia de la continuidad de las primeras derivadas parciales de $M(x, y)$ y $N(x, y)$. ■

La parte de la suficiencia del teorema 2.1 consiste en demostrar que existe una **función,** f, para la cual $\partial f/\partial x = M(x, y)$, y $\partial f/\partial y = N(x, y)$ siempre que se aplique la ecuación (4). En realidad, la construcción de la **función** f **constituye** un procedimiento básico para resolver las ecuaciones diferenciales exactas.

Método de solución Dada una ecuación de la forma $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$, **se** determina si es válida la igualdad (4). En caso afiiativo, existe una funciónfpara la cual

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y).$$

Podemos determinar f si integramos $M(x, y)$ con respecto a x, manteniendo y constante:

$$f(x, y) = \int M(x, y)\, dx + g(y), \tag{5}$$

en donde la función arbitraria $g(y)$ es la "constante" de integración. Ahora derivamos (5) con respecto ay, y suponemos que $\partial f/\partial y = N(x, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\, dx + g'(y) = N(x, y).$$

Esto da

$$g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\, dx. \tag{6}$$

Por último integramos (6) con respecto a y y sustituimos el resultado en la ecuación (5). La solución de la ecuación es $f(x, y) = c$.

Nota

Es pertinente hacer algunas observaciones. La primera, es importante darse cuenta de que la expresión $N(x, y) - (\partial/\partial y)\int M(x, y)\, dx$ en la ecuación (6) es independiente de x porque

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\, dx\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x, y)\, dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

En segundo lugar, también pudimos iniciar el procedimiento anterior suponiendo que $\partial f/\partial y = N(x, y)$. Después de integrar **N** con respecto a y y derivar el resultado, llegaríamos a los análogos de las ecuaciones (5) y (6) que serían, respectivamente,

$$f(x, y) = \int N(x, y)\, dy + h(x) \qquad \text{y} \qquad h'(x) = M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x, y)\, dy.$$

En ambos casos, no se deben memorizar las Fórmulas.

EJEMPLO 2 **Solución de una ecuación diferencial exacta**

Resolver $2xy\, dx + (x^2 - 1)\, dy = 0$.

SOLUCIÓN Igualamos $M(x, y) = 2xy$ y $N(x, y) = x^2 - 1$ y tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

En consecuencia, la ecuación es exacta y, de acuerdo con el teorema 2.1, existe una función $f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1.$$

Al integrar la primera de estas ecuaciones obtenemos

$$f(x, y) = x^2y + g(y).$$

Determinamos la derivada parcial con respecto a y, igualamos el resultado a $N(x, y)$ y obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) = x^2 - 1. \qquad \leftarrow N(x, y)$$

Por lo tanto, $g'(y) = -1$ Y $g(y) = -y$.

No es necesario incluir la constante de integración en este caso porque la solución es $f(x, y) = c$. En la figura 2.4 se ilustran algunas curvas de la familia $x^2y - y = c$.

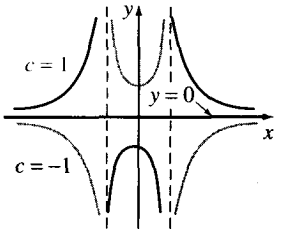


FIGURA 2.4

Nota

La solución de la ecuación no es $f(x, y) = x^2y - y$, sino que es $f(x, y) = c$ o $f(x, y) = 0$, si se usa una constante en la integración de $g'(y)$. Obsérvese que la ecuación también se podría haber resuelto por separación de variables. ■

EJEMPLO 3 **Solución de una ecuación diferencial exacta**

Resolver $(e^{2y} - y \cos xy)\,dx + (2xe^{2y} - x \cos xy + 2y)\,dy = 0$.

SOLUCIÓN La ecuación es exacta, porque

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} + xysenxy - \cos xy = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Entonces, existe una función $f(x, y)$ para la cual

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad Y \qquad N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Para variar, comenzaremos con la hipótesis que $\partial f/\partial y = N(x, y)$;

esto es,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{2y} - x\cos xy + 2y$$

$$f(x, y) = 2x\int e^{2y}\,dy - x\int \cos xy\,dy + 2\int y\,dy.$$

Recuérdese que la razón por la que x sale del símbolo $\int$ es que en la integración con respecto ay se considera que x es una constante ordinaria. Entonces

$$f(x, y) = xe^{2y} - \text{sen } xy + y^2 + h(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{2y} - y\cos xy + h'(x) = e^{2y} - y\cos xy, \qquad \leftarrow M(x, y)$$

así que h'(x) = 0, o h(x) = c; por consiguiente, una familia de soluciones es

$$xe^{2y} - \text{sen } xy + y^2 + c = 0. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 **Un problema de valor inicial**

Resolver el problema de valor inicial

$$(\cos x \text{ sen } x - xy^2)\,dx + y(1 - x^2)\,dy = 0, \quad y(0) = 2.$$

SOLUCIÓN La ecuación es exacta, porque

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y(1 - x^2)$$

$$f(x, y) = \frac{y^2}{2}(1 - x') + h(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -xy^2 + h'(x) = \cos x \text{sen} x - xy^2.$$

La última ecuación implica que h'(x) = cos x sen x. Al integrar obtenemos

$$h(x) = -\int (\cos x)(-\text{sen } x\,dx) = -\frac{1}{2}\cos^2 x.$$

Así

$$\frac{y^2}{2}(1 - x') - \frac{1}{2}\cos^2 x = c_1 \quad \text{o sea} \quad y^2(1 - x^2) - \cos^2 x = c,$$

en donde c reemplazó a $2c_1$. Para que se cumpla la condición inicial y = 2 cuando $x = 0$, se requiere que $4(1) - \cos^2(0) = c$ -es decir, que c = 3-. Así, una solución del problema es $y^2(1 - x^2) - \cos^2 x = 3$. ■

Observación —

Al probar si una ecuación es exacta se debe asegurar que tiene la forma precisa $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$. Quizá en ocasiones haya una ecuación diferencial de la forma $C(x, y)\,dx = H(x, y)\,dy$. En este caso se debe reformular primero como $G(x, y)\,dx - H(x, y)\,dy = 0$, y después identificar $M(x, y) = G(x, y)$, y $N(x, y) = -H(x, y)$, y sólo entonces aplicar la ecuación (4).

EJERCICIOS 2.2

En los problemas 1 a 24 determine si la ecuación respectiva es exacta. Si lo es, resuélvala.

1. $(2x - 1)\,dx + (3y + 7)\,dy = 0$
2. $(2x + y)\,dx - (x + 6y)\,dy = 0$
3. $(5x + 4y)\,dx + (4x - 8y^3)\,dy = 0$
4. $(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x)\,dx + (\cos x + x \cos y - y)\,dy = 0$
5. $(2y^2x - 3)\,dx + (2yx^2 + 4)\,dy = 0$
6. $\left(2y - \frac{1}{x} + \cos 3x\right)\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y \operatorname{sen} 3x = 0$
7. $(x + y)(x - y)\,dx + x(x - 2y)\,dy = 0$
8. $\left(1 + \ln x + \frac{y}{x}\right)dx = (1 - \ln x)\,dy$
9. $(y^3 - y^2 \operatorname{sen} x - x)\,dx + (3xy^2 + 2y \cos x)\,dy = 0$
10. $(x^3 + y^3)\,dx + 3xy^2\,dy = 0$
11. $(y \ln y - e^{-xy})\,dx + \left(\frac{1}{y} + x \ln y\right)dy = 0$
12. $\frac{2x}{y}\,dx - \frac{x^2}{y^2}\,dy = 0$
13. $x\frac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$
14. $(3x^2y + e^y)\,dx + (x^3 + xe^y - 2y)\,dy = 0$
15. $\left(1 - \frac{3}{x} + y\right)dx + \left(1 - \frac{3}{y} + x\right)dy = 0$
16. $(e^y + 2xy \cosh x)y' + xy^2 \operatorname{senh} x + y^2 \cosh x = 0$
17. $\left(x^2y^3 - \frac{1}{1 + 9x^2}\right)\frac{dx}{dy} + x^3y^2 = 0$
18. $(5y - 2x)y' - 2y = 0$
19. $(\tan x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\,dx + \cos x \cos y\,dy = 0$

20. $(3x \cos 3x + \operatorname{sen} 3x - 3)\,dx + (2y + 5)\,dy = 0$

21. $(1 - 2x^2 - 2y)\,\dfrac{dy}{dx} = 4x^3 + 4xy$

22. $(2y \operatorname{sen} x \cos x - y + 2y^2e^{xy^2})\,dx = (x - \operatorname{sen}^2 x - 4xye^{xy^2})\,dy$

23. $(4x^3y - 15x^2 - y)\,dx + (x^4 + 3y^2 - x)\,dy = 0$

24. $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(ye^y + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0$

En los problemas 25 a 30 resuelva cada ecuación diferencial sujeta a la condición inicial indicada.

25. $(x + y)^2\,dx + (2xy + x^2 - 1)\,dy = 0, \quad y(1) = 1$

26. $(e^x + y)\,dx + (2 + x + ye^y)\,dy = 0, \quad y(0) = 1$

27. $(4y + 2x - 5)\,dx + (6y + 4x - 1)\,dy = 0, \quad y(-1) = 2$

28. $\left(\dfrac{3y^2 - x^2}{y^5}\right)\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x}{2y^4} = 0, \quad y(1) = 1$

29. $(y^2 \cos x - 3x^2y - 2x)\,dx + (2y \operatorname{sen} x - x^3 + \ln y)\,dy = 0, \quad y(0) = e$

30. $\left(\dfrac{1}{1 + y^2} + \cos x - 2xy\right)\dfrac{dy}{dx} = y(y + \operatorname{sen} x), \quad y(0) = 1$

En los problemas 31 a 34 determine el valor de k para que la ecuación diferencial correspondiente sea exacta.

31. $(y^3 + kxy^4 - 2x)\,dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)\,dy = 0$

32. $(2x - \text{ysenxy} + ky^4)\,dx - (20xy^3 + \text{xsenxy})\,dy = 0$

33. $(2xy^2 + ye^x)\,dx + (2x^2y + ke^x - 1)\,dy = 0$

34. $(6xy^3 + \cos y)\,dx + (kx^2y^2 - x \operatorname{sen} y)\,dy = 0$

35. Deduzca una función $M(x, y)$ tal que la siguiente ecuación diferencial sea exacta:

$$M(x, y)\,dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x}\right)dy = 0.$$

36. Determine una función $N(x, y)$ tal que la siguiente ecuación diferencial sea exacta:

$$\left(y^{1/2}x^{-1/2} + \frac{x}{x^2 + y}\right)dx + N(x, y)\,dy = 0.$$

A veces es posible **transformar** una ecuación diferencial no exacta, $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ en una exacta multiplicándola por un factor integrante $\mu(x, y)$. En los problemas 37 a 42 resuelva la ecuación respectiva comprobando que la función indicada, $\mu(x, y)$, sea un factor integrante.

37. $6xy\,dx + (4y + 9x^2)\,dy = 0, \quad \mu(x, y) = y^2$

38. $-y^2\,dx + (x^2 + xy)\,dy = 0, \quad \mu(x, y) = \dfrac{1}{x^2y}$

39. $(-xy \operatorname{sen} x + 2y \cos x)\,dx + 2x \cos x\,dy = 0, \quad \mu(x, y) = xy$

40. $y(x + y + 1)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0, \quad \mu(x, y) = e^x$

41. $(2y^2 + 3x)\,dx + 2xy\,dy = 0, \quad \mu(x, y) = x$

42. $(x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (y^2 + 2xy - x^2)\,dy = 0, \quad \mu(x, y) = (x + y)^{-2}$

Problema para discusión

43. Revisemos el concepto de factor integrante que se presentó en los problemas 37 a 42. Las dos ecuaciones, $M\,dx + N\,dy = 0$ y $\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$, ¿son necesariamente equivalentes en el sentido que una solución de la primera también es una solución de la segunda o viceversa?

2.3 ECUACIONES LINEALES

■ *Definición de una ecuación diferencial lineal* ■ *Forma normal de una ecuación lineal* ■ *Variación de parámetros* ■ *Método de solución* ■ *Factor integrante* ■ *Solución general* ■ *Función definida por una integral*

En el capítulo 1 definimos la forma general de una ecuación diferencial lineal de orden n como sigue:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Recuérdese que linealidad quiere decir que todos los coeficientes sólo son funciones de x y que y y todas sus derivadas están elevadas a la primera potencia. Entonces, cuando $n = 1$, la ecuación es lineal y de primer orden.

DEFINICIÓN 2.3 **Ecuación lineal**

Una ecuación diferencial de primer orden, de la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad (1)$$

es una **ecuación lineal.**

Al dividir ambos lados de la ecuación (1) entre el primer coeficiente, $a_1(x)$, se obtiene una forma más útil, la **forma estándar** de una ecuación lineal:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \qquad (2)$$

Debemos hallar una solución de (2) en un intervalo I, sobre el cual las dos funciones P y f sean continuas.

En la descripción que sigue ilustraremos una propiedad y un procedimiento, y terminaremos con una fórmula que representa una solución de (2). La propiedad y el procedimiento son más importantes que la fórmula, porque ambos se aplican también a ecuaciones lineales de orden superior.

Propiedad El lector puede comprobar por sustitución directa que la ecuación diferencial (2) tiene la propiedad de que su solución **es** la **suma** de las dos soluciones, $y = y_c + y_p$, donde y_c es una solución de

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{3}$$

y y_p es una solución particular de (2). Podemos determinar y_c por separación de variables. Escribimos la ecuación (3) en la forma

$$\frac{dy}{y} + P(x)\,dx = 0,$$

al integrar y despejar ay obtenemos $y_c = ce^{-\int P(x)dx}$. Por comodidad definiremos $y_c = cy_1(x)$, en donde $y_1 = e^{-\int P(x)dx}$. Aplicaremos de inmediato el hecho que $dy_1/dx + P(x)y_1 = 0$, para determinar a y_p.

Procedimiento Ahora podemos definir una solución particular de la ecuación (2), siguiendo un procedimiento llamado **variación de parámetros.** Aquí, la idea básica es encontrar una función, u, tal que $y_p = u(x)y_1(x)$, en que y 1, que está definida en el párrafo anterior, sea una solución de la ecuación (2). En otras palabras, nuestra hipótesis de y_p equivale ay, $= cy_1(x)$, excepto que el "parámetro variable" u reemplaza a c. Al sustituir $y_p = uy_1$ en (2) obtenemos

$$\frac{d}{dx}[uy_1] + P(x)uy_1 = f(x)$$

$$u\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{du}{dx} + P(x)uy_1 = f(x)$$

$$u\underbrace{\left[\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1\right]}_{\text{cero}} + y_1\frac{du}{dx} = f(x)$$

de modo que

$$y_1\frac{du}{dx} = f(x).$$

Separamos variables, integramos y llegamos a

$$du = \frac{f(x)}{y_1(x)}\,dx \qquad \text{y} \qquad u = \int \frac{f(x)}{y_1(x)}\,dx.$$

De acuerdo con la definición de y_1, tenemos

$$y_p = uy_1 = e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}f(x)\,dx.$$

Así,

$$y = y_c + y_p = ce^{-\int P(x)\,dx} + e^{-\int P(x)\,dx} \int e^{\int P(x)\,dx} f(x)\,dx. \tag{4}$$

Entonces, si (1) tiene una solución, debe poseer la forma de la ecuación (4). Recíprocamente, por derivación directa se comprueba que la ecuación (4) es una familia monoparamétrica de soluciones de la ecuación (2).

No se debe tratar de memorizar la ecuación (4). Hay un modo equivalente y más fácil de resolver la ecuación (2). Si se multiplica (4) por

$$e^{\int P(x)\,dx} \tag{5}$$

y después se deriva

$$e^{\int P(x)\,dx} y = c + \int e^{\int P(x)\,dx} f(x)\,dx \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)\,dx} y\right] = e^{\int P(x)\,dx} f(x), \tag{7}$$

llegamos a

$$e^{\int P(x)\,dx} \frac{dy}{dx} + P(x) e^{\int P(x)\,dx} y = e^{\int P(x)\,dx} f(x). \tag{8}$$

Al dividir este resultado entre $e^{\int P(x)\,dx}$ obtenemos la ecuación (2).

Método de solución El método que se recomienda para resolver las ecuaciones (2) consiste, en realidad, en pasar por las ecuaciones (6) a (8) en orden inverso. Se reconoce el lado izquierdo de la ecuación (8) como la derivada del producto de $e^{\int P(x)\,dx}$ por y. Esto lleva a (7). A continuación integramos ambos lados de (7) para obtener la solución (6). Como podemos resolver (2) por integración, después de multiplicar por $e^{\int P(x)\,dx}$, esta función se denomina **factor integrante** de la ecuación diferencial. Por comodidad resumiremos estos resultados.

Solución de una ecuación lineal de primer orden

i) Para resolver una ecuación lineal de primer orden, primero se convierte a la forma de (2); esto es, se hace que el coeficiente de dy/dx sea la unidad.

ii) Hay que identificar $P(x)$ y definir el factor integrante, $e^{\int P(x)\,dx}$

iii) La ecuación obtenida en el paso *i* se multiplica por el factor integrante:

$$e^{\int P(x)\,dx} \frac{dy}{dx} + P(x)\, e^{\int P(x)\,dx} y = e^{\int P(x)\,dx} f(x).$$

iv) El lado izquierdo de la ecuación obtenida en el paso *iii* es la derivada del producto del factor integrante por la variable dependiente, y; esto es,

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)\,dx} y\right] = e^{\int P(x)\,dx} f(x).$$

v) Se integran ambos lados de la ecuación obtenida en el paso *iv*.

EJEMPLO 1 **Solución de una ecuación diferencial lineal**

Resolver $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^6e^x$.

SOLUCIÓN Al dividir entre x llegamos a la forma normal

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5e^x. \tag{9}$$

Así escrita, reconocemos que $P(x) = -4/x$ y entonces el factor integrante es

$$e^{-4\int dx/x} = e^{-4\ln|x|} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}.$$

Hemos aplicado la identidad básica $b^{\log_b N} = N$, N > 0. Ahora multiplicamos la ecuación (9) por este término,

$$x^{-4}\frac{dy}{dx} \quad 4x^{-5}y = xe^x, \tag{10}$$

y obter and obtain

$$\frac{d}{dx}[x^{-4}y] = xe^x. \tag{11}$$

Si integramos por partes, llegamos a

$$x^{-4}y = xe^x - e^x + c \quad \text{0 sea} \quad y = x^5e^x - x^4e^x + cx^4. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 **Solución de una ecuación diferencial lineal**

Resolver $\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0$.

SOLUCIÓN Esta ecuación diferencial se puede resolver separando variables. También, como la ecuación se encuentra en la forma normal (2), tenemos que el factor integrante es $e^{\int(-3)dx} = e^{-3x}$. Multiplicamos la ecuación dada por este factor y el resultado es $e^{-3x}dy/dx - 3e^{-3x}y = 0$. Esta última ecuación equivale a

$$\frac{d}{dx}[e^{-3x}y] = 0.$$

Al integrar obtenemos $e^{-3x}y = c$ y, por consiguiente, $y = ce^{3x}$. $\blacksquare$

Solución general Si se supone que $P(x)$ y f(x) son continuas en un intervalo I y que x_0 es cualquier punto del intervalo, entonces, según el teorema 1.1, existe sólo una solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x), \quad y(x_0) = y_0. \tag{12}$$

Pero habíamos visto que la ecuación (2) posee una familia de soluciones y que toda solución de la ecuación en el intervalo I tiene la forma de (4). Así, para obtener una solución de la ecuación (12) basta hallar un valor adecuado de c en la ecuación (4). Por consiguiente, el nombre **solución general** que aplicamos a (4) está justificado. Recuérdese que, en algunos casos, llegamos a soluciones singulares de ecuaciones no lineales. Esto no puede suceder en el caso de una ecuación lineal si se pone la atención debida a resolver la ecuación en un intervalo común, en que $P(x)$ y f(x) sean continuas.

EJEMPLO 3 **Solución general**

Determinar la solución general de $(x^2 + 9)\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$.

SOLUCIÓN Escribimos $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x}{x^2+9}y = 0.$

La función $P(x) = x/(x^2 + 9)$ es continua en $(-\infty, \infty)$. Entonces, el factor integrante para la ecuación es

$$e^{\int x\,dx/(x^2+9)} = e^{\frac{1}{2}\int 2x\,dx/(x^2+9)} = e^{\frac{1}{2}\ln(x^2+9)} = \sqrt{x^2+9}$$

y así $$\sqrt{x^2+9}\,\frac{dy}{dx} + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}y = 0 \quad \text{o} \quad .$$

Al integrar

$$\frac{d}{dx}[\sqrt{x^2+9}\,y] = 0 \quad \text{da como resultado} \quad \sqrt{x^2+9}\,y = c.$$

Así pues, la solución general en el intervalo es

$$y = \frac{c}{\sqrt{x^2+9}}.$$

■

A excepción del caso en que el primer coeficiente es 1, la transformación de la ecuación (1) a la forma normal (2) requiere dividir entre $a_1(x)$. Si $a_1(x)$ no es una constante, se debe tener mucho cuidado con los puntos donde $a_1(x) = 0$. En forma específica, en la ecuación (2), los puntos en que $P(x)$ -obtenida dividiendo $a_0(x)$ entre $a_1(x)$— sea discontinua son potencialmente problemáticos.

EJEMPLO 4 **Problema de valor inicial**

Resolver el problema de valor inicial $x\dfrac{dy}{dx} + y = 2x, \quad y(1) = 0.$

SOLUCIÓN Escribimos la ecuación dada en la forma

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 2,$$

y vemos que $P(x) = 1/x$ es continua en cualquier intervalo que no contenga al origen. En vista de la condición inicial, resolveremos el problema en el intervalo $(0, \infty)$.

El factor integrante es $e^{\int dx/x} = e^{\ln x} = x$, y así

$$\frac{d}{dx}[xy] = 2x$$

que es igual a $xy = x^2 + c$. Despejamos y y llegamos a la solución general

$$y = x + \frac{c}{x}. \tag{13}$$

Pero $y(1) = 0$ implica que $c = -1$; por consiguiente, la solución es

$$y = x - \frac{1}{x}, \quad 0 < x < \infty. \tag{14}$$

La gráfica de la ecuación (13), como familia monoparamétrica de curvas, se presenta en la figura 2.5. La solución (14) del problema de valor inicial se indica como la línea gruesa en la gráfica ■

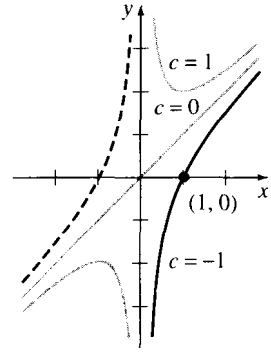


FIGURA 2.5

El ejemplo siguiente muestra cómo resolver la ecuación (2) cuandoftiene una discontinuidad.

EJEMPLO 5 **Una $f(x)$ discontinua**

Determinar una solución continua que satisfaga

$$\frac{dy}{dx} + y = f(x), \quad \text{en donde} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

y la condición inicial $y(0) = 0$.

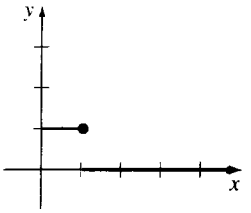


FIGURA 2.6

SOLUCIÓN En la figura 2.6 vemos que f es continua en intervalos, con una discontinuidad en $x = 1$. En consecuencia, resolveremos el problema en las dos partes que corresponden a los dos intervalos en que f está definida. Para $0 \le x \le 1$,

$$\frac{dy}{dx} + y = 1 \qquad 0, \text{ lo que es igual, } \qquad \frac{d}{dx}[e^x y] = e^x.$$

Al integrar la última ecuación y despejar y, obtenemos $y = 1 + c_1 e^{-x}$. Como $y(0) = 0$, se debe cumplir que $c_1 = -1$ y, por consiguiente,

$$y = 1 - e^{-x}, \quad 0 \le x \le 1.$$

Parax > 1,
$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

da como resultado $y = c_2 e^{-x}$. Por lo anterior podemos escribir

$$y = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & 0 \le x \le 1 \\ c_2 e^{-x}, & x > 1. \end{cases}$$

Ahora, para que y sea función continua, necesitamos que $\lim_{x \to 1^+} y(x) = y(1)$. Este requisito equivale a $c_2 e^{-1} = 1 - e^{-1}$, o bien, $c_2 = e - 1$. Como vemos en la figura 2.7, la función

$$y = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & 0 \le x \le 1 \\ (e - 1)e^{-x}, & x > 1 \end{cases}$$

es continua pero no es diferenciable en $x = 1$. ■

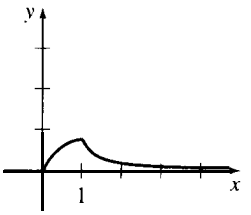


FIGURA 2.7

Funciones definidas por integrales Algunas funciones simples no poseen antiderivadas que sean funciones elementales, y las integrales de esas funcione; se llaman no **elementales.** Por ejemplo, el lector habrá aprendido en cálculo integral que $\int e^x\,dx$ e J sen $x^2\,dx$ no son integrales elementales. En matemáticas aplicadas se *definen* algunas funciones importantes en términos de integrales no elementales. Dos de esas funciones son la **función de error y** la **función de error complementario:**

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \qquad \text{y} \qquad \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt. \tag{15}$$

Como $(2/\sqrt{p})\int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$, tenemos que la función de error complementario, erfc(x), se relaciona con erf(x) mediante $\mathbf{erf}(x) + \mathbf{erfc}(x) = \mathbf{1}$ [Ec. (15)]. Debido a su importancia en áreas como probabilidad y estadística, se cuenta con tablas de la función de error. Sin embargo, obsérvese que erf(0) = 0 es valor obvio de la función. Los valores de la función de error también se pueden determinar con un sistema algebraico de computación (SAC).

EJEMPLO 6 la función de error

Resolver el problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} - 2xy = 2,\ y(0) = 1.$

SOLUCIÓN Como la ecuación ya se encuentra en la forma normal, el factor integrante es e^{-x^2}, y entonces, partiendo de

$$\frac{d}{dx}[e^{-x^2}y] = 2e^{-x^2} \quad \text{obtenemos} \quad y = 2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + ce^{x^2}. \tag{16}$$

Sustituimos y(O) = 1 en la última expresión y obtenemos c = 1; por consiguiente, la solución del problema es

$$y = 2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + e^{x^2} = e^{x^2}[1 + \sqrt{\pi}\,\operatorname{erf}(x)].$$

La gráfica de esa solución, que aparece en línea gruesa en la figura 2.8, junto a otros miembros de la familia definida por la ecuación (16), se obtuvo con un sistema algebraico de cómputo. ■

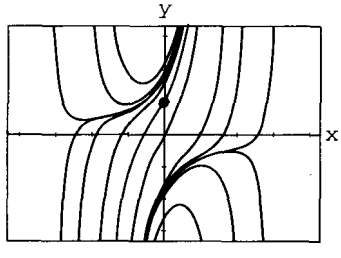


FIGURA 2.8 Algunas soluciones de $y' - 2xy = 2$

Empleo de computadoras Algunos sistemas algebraicos de computación (programas matemáticos) son capaces de dar soluciones explícitas para algunos tipos de ecuaciones diferenciales; por ejemplo, para resolver la ecuación $y' + 2y = x$, se teclea

```
DSolve[y'[x] + 2y[x] == x,y[x],x]    (en Mathematica)
```

Y

```
dsolve(diff(y(x),x) + 2*y = x,y(x));    (en Mnple)
```

y se obtiene, respectivamente,

$$y[x] \to -\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{x}{2} + \frac{C[1]}{E^{2x}}$$

Y

$$y(x) = 1/2\,x \quad 1/4 + \exp(\quad 2\,x)\_C1$$

Traducidos a la simbología normal, ambos son $y = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x + ce^{-2x}$.

Observación

A veces, una ecuación diferencial de primer orden no es lineal en una variable, pero sí en la otra; por ejemplo, a causa del término y^2, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y^2}$$

no es lineal en la variable y; mas su recíproca

$$\frac{dx}{dy} = x + y^2 \quad \text{o bien} \quad \frac{dx}{dy} - x = y^2.$$

sí lo es en x. El lector debe comprobar que el factor integrante sea $e^{\int(-1)\,dy} = e^{-y}$ y que se obtenga $x = -y - 2y - 2 + ce^{y}$, integrando por partes.

EJERCICIOS 2.3

En los problemas 1 a 40, determine la solución general de la ecuación diferencial dada. Especifique un intervalo en el cual esté definida la solución general.

1. $\frac{dy}{dx} = 5y$

2. $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

3. $3\frac{dy}{dx} + 12y = 4$

4. $x\frac{dy}{dx} + 2y = 3$

5. $\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$

6. $\frac{dy}{dx} = y + e^{x}$

7. $y' + 3x^2y = x^2$

8. $y' + 2xy = x^3$

9. $x^2y' + xy = 1$

10. $y' = 2y + x^2 + 5$

11. $(x + 4y^2)\,dy + 2y\,dx = 0$

12. $\frac{dx}{dy} = x + y$

13. $x\,dy = (x \operatorname{sen} x - y)\,dx$

14. $(1 + x^2)\,dy + (xy + x^3 + x)\,dx = 0$

15. $(1 + e^x)\dfrac{dy}{dx} + e^x y = 0$

16. $(1 - x^3)\dfrac{dy}{dx} = 3x^2y$

1% $\cos x \dfrac{dy}{dx} + y \operatorname{sen} x = 1$

18. $\dfrac{dy}{dx} + y \cot x = 2 \cos x$

19. $x\dfrac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$

20. $(1 + x)y' - xy = x + x^2$

21. $x^2y' + x(x + 2)y = e^x$

22. $xy' + (1 + x)y = e^{-x} \operatorname{sen} 2x$

23. $\cos^2 x \operatorname{sen} x\,dy + (y \cos^3 x - 1)\,dx = 0$

24. $(1 - \cos x)\,dy + (2y \operatorname{sen} x - \tan x)\,dx = 0$

25. $y\,dx + (xy + 2x - ye^y)\,dy = 0$

26. $(x^2 + x)\,dy = (x^2 + 3xy + 3y)\,dx$

27. $x\dfrac{dy}{dx} + (3x + 1)y = e^{3x}$

28. $(x + 1)\dfrac{dy}{dx} + (x + 2)y = 2xe^{-x}$

29. $y\,dx - 4(x + y^2)\,dy = 0$

30. $xy' + 2y = e^x + \ln x$

31. $\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1 - e^{-2x}}{e^x + e^{-x}}$

32. $\dfrac{dy}{dx} - y = \operatorname{senh} x$

33. $y\,dx + (x + 2xy^2 - 2y)\,dy = 0$

34. $y\,dx = (ye^y - 2x)\,dy$

35. $\dfrac{dr}{d\theta} + r \sec\theta = \cos\theta$

36. $\dfrac{dP}{dt} + 2tP = P + 4t - 2$

37. $(x + 2)^2\dfrac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy$

38. $(x^2 - 1)\dfrac{dy}{dx} + 2y = (x + 1)^2$

39. $y' = (10 - y)\cosh x$

40. $dx = (3e^y - 2x)\,dy$

En los problemas 41 a 50 resuelva la ecuación diferencial respectiva, sujeta a la condición inicial indicada.

41. $\dfrac{dy}{dx} + 5y = 20,\ y(0) = 2$

42. $y' = 2y + x(e^{3x} - e^{2x}),\ y(0) = 2$

43. $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E;$ L, R y E son constantes, $i(0) = i_0$

44. $y\dfrac{dx}{dy} - x = 2y^2,\ y(1) = 5$

45. $y' + (\tan x)y = \cos^2 x,\ y(0) = -1$

46. $\dfrac{dQ}{dx} = 5x^4Q,\quad Q(0) = -7$

47. $\dfrac{dT}{dt} = k(T - 50);$ k es una constante, $T(0) = 200$

48. $x\,dy + (xy + 2y - 2e^{-x})\,dx = 0, \quad y(1) = 0$

49. $(x+1)\frac{dy}{dx} + y = \ln x, \quad y(1)=10$

50. $xy' + y = e^x, \quad y(1) = 2$

Determine una solución continua que satisfaga la ecuación general dada en los problemas 5 1 a 54 y la condición inicial indicada. Emplee una graficadora para trazar la curva solución.

51. $\frac{dy}{dx} + 2y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 3, \\ 0, & x > 3 \end{cases} \quad y(0) = 0$

52. $\frac{dy}{dx} + y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases}, \quad y(0) = 1$

53. $\frac{dy}{dx} + 2xy = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}, \quad y(0) = 2$

54. $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ -x, & x \ge 1 \end{cases}, \quad y(0) = 0$

55. La **función integral seno se define** por $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$, donde se define que el integrando sea 1 cuando $t = 0$. Exprese la solución del problema de valor inicial

$$x^3\frac{dy}{dx} + 2x^2y = 10\operatorname{sen} x, \qquad y(1) = 0$$

en términos de Si(x). Utilice tablas o un sistema algebraico de computación para calcular $y(2)$. Use un programa para ecuaciones diferenciales (*ODE solver*) o un SAC para graficar la solución cuando $x > 0$.

56. Demuestre que la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = -1, \qquad y(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

es $y = \sqrt{p}/2)e^{x^2}$ erfc(x). Use tablas o un sistema algebraico de cómputo para calcular $y(2)$. Grafique la curva de solución con un programa *ODE solver o un* SAC.

57. Exprese la solución al problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 1, \qquad y(1) = 1$$

en términos de la erf(x).

Problemas para discusión

58. El análisis de las ecuaciones diferenciales no lineales comienza, a veces, omitiendo los términos no lineales de la ecuación o reemplazándolos con términos lineales. La ecuación

diferencial que resulta se llama **linealización** de la primera ecuación; por ejemplo, la ecuación diferencial no lineal

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) = rP - \frac{r}{K}P^2, \tag{17}$$

donde r y K son constantes positivas, se usa con frecuencia como modelo de una población creciente pero acotada. Se puede razonar que cuando P se acerca a cero, el término no lineal P^2 es insignificante. Entonces, una linealización de la primera ecuación es

$$\frac{dP}{dt} = rP. \tag{18}$$

Supongamos que r = 0.02 y que K = 300. Con un programa compárese la solución de la ecuación (17) con la de la (1 **8),** con el mismo valor inicial $P(0)$. Haga lo anterior para un valor inicial pequeño, $P(0) = 0.5$ o $P(0) = 2$, hasta $P(0) = 200$ por ejemplo. Escriba sus observaciones.

59. El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales aparece al estudiar un tipo especial de elementos de una serie radiactiva:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1 x$$

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_1 x - \lambda_2 y,$$

en donde λ_1 y λ_2 son constantes. Describa cómo resolver el sistema, sujeto a x(O) $= x_0$, y(O) $= y_0$.

60. En las dos partes de este problema, suponga que ay b son constantes, que $P(x), f(x), f_1(x)$ y $f_2(x)$ son continuas en un intervalo I y que x_0 es cualquier punto en I.

a) Suponga que y_1 es una solución del problema de valor inicial y' + $P(x)y = 0$, $y(x_0) = a$, y que y_2 es una solución dey' + $P(x)y = f(x)$, $y(x_0)$ = 0. Determine una solución dey' + $P(x)y = f(x)$, $y(x_0) = a$. Demuestre que su solución es correcta.

b) Suponga que y_1 es una solución dey' + $P(x)y = f_1(x)$, $y(x_0) = a$ y que y_2 es una solución dey' + $P(x)y = f_2(x)$, $y(x_0) = \beta$. Si y es una solución dey' + $P(x)y = f_1(x) + f_2(x)$, ¿cuál es el valor $y(x_0)$? Demuestre su respuesta. Si y es una solución dey' + $P(x)y = c_1 f_1(x)$ + $c_2 f_2(x)$, donde c_1 y c_2 son constantes especificadas arbitrariamente, ¿cuál es el valor de $y(x_0)$? Justifique su respuesta.

2.4 SOLUCIONES POR SUSTITUCIÓN

■ *Sustitución en una ecuación diferencial* ■ *Función homogénea* ● *Ecuación diferencial homogénea* ■ *Ecuación general de Bernoulli*

Sustituciones Para resolver una ecuación diferencial, reconocemos en ella cierto tipo de ecuación (separable, por ejemplo), y a continuación aplicamos un procedimiento formado por

etapas específicas del tipo de ecuación que nos conducen a una función diferenciable, la cual satisface la ecuación. A menudo, el primer paso es transformarla en otra ecuación diferencial mediante **sustitución.** Por ejemplo. supongamos que se quiere transformar la ecuación de primer orden $dy/dx = f(x, y)$ con la sustitución y = g(x, u), en que u se considera función de la variable x. Si g tiene primeras derivadas parciales, entonces, la regla de la cadena da,

$$\frac{dy}{dx} = g_x(x, u) + g_u(x, u)\frac{du}{dx}.$$

Al sustituir dy/dx con $f(x, y)$ y y cong(x, u) en la derivada anterior, obtenemos la nueva ecuación diferencial de primer orden

$$f(x, g(x, u)) = g_x(x, u) + g_u(x, u)\frac{du}{dx}$$

que, después de despejar du/dx, tiene la forma $du/dx = F(x, u)$. Si podemos determinar una solución $u = \phi(x)$ de esta segunda ecuación, una solución de la ecuación diferencial ordinaria es $y = g(x, \phi(x))$.

Uso de sustituciones: ecuaciones homogéneas Cuando una funciónftiene la propiedad

$$f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x, y)$$

para un número real α, se dice quefes una **función homogénea** de grado α; por ejemplo, $f(x, y) = x^3 + y^3$ es homogénea de grado 3, porque

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + (ty)^3 = t^3(x^3 + y') = t^3 f(x, y),$$

mientras que $f(x, y) = x^3 + y^3 + 1$ no es homogénea.

Una ecuación diferencial de primer orden,

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \qquad (1)$$

es **homogénea** si los coeficientes M y N, a la vez, son funciones homogéneas del *mismo* grado. En otras palabras, la ecuación (1) es homogénea si

$$M(tx, ty) = t^{\alpha} M(x, y) \qquad \text{y} \qquad N(tx, ty) = t^{\alpha} N(x, y).$$

Método de solución Una ecuación diferencial homogénea como $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ se puede resolver por sustitución algebraica. Específicamente, *alguna* de las dos sustituciones y = ux, o $x = vy$, donde u y v son nuevas variables dependientes, ***reducen la ecuación a una ecuación diferencial separable, de primer orden.*** Para demostrarlo, sustituimos y = ux y su diferencial, $dy = u\,dx + x$, en la ecuación (1):

$$M(x, ux)\,dx + N(x, ux)[u\,dx + x\,du] = 0.$$

Aplicamos la propiedad de homogeneidad para poder escribir

$$x^{\alpha} M(1, u)\,dx + x^{\alpha} N(1, u)[u\,dx + x\,du] = 0$$

o bien $$[M(1, u) + uN(1, u)]\,dx + xN(1, u)\,du = 0,$$

que da $$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, u)\,du}{M(1, u) + uN(1, U)} = 0.$$

Volvemos a insistir en que esta fórmula no se debe memorizar; más bien, ***cada vez se debe aplicar el método.*** La demostración de que la sustitución $x = vy$ en la ecuación (1) también conduce a una ecuación separable es análoga.

EJEMPLO 1 **Solución de una ecuación diferencial homogénea**

Resolver $(x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$.

SOLUCIÓN Al examinar $M(x, y) = x^2 + y^2$ y $N(x, y) = x^2 - xy$ vemos que los dos coeficientes son funciones homogéneas de grado 2. Si escribimos $y = ux$, entonces $dy = u\,dx$ y así, después de sustituir, la ecuación dada se transforma en

$$\begin{aligned}(x^2 + u^2x^2)\,dx + (x^2 - ux^2)[u\,dx + x\,du] &= 0\\ x^2(1 + u)\,dx + x^3(1 - u)\,du &= 0\\ \frac{1 - u}{1 + u}\,du + \frac{dx}{x} &= 0\\ \left[-1 + \frac{2}{1 + u}\right]du + \frac{dx}{x} &= 0. \quad \text{división larga}\end{aligned}$$

Luego de integrar, el último renglón se transforma en

$$-u + 2\ln|1 + u| + \ln|x| = \ln|c|$$

$$-\frac{y}{x} + 2\ln\left|1 + \frac{y}{x}\right| + \ln|x| = \ln|c|. \quad \leftarrow \text{sustitución inversa } u = y/x$$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos para escribir la solución anterior en la forma

$$\ln\left|\frac{(x + y)^2}{cx}\right| = \frac{y}{x} \quad 0, \text{ lo que es lo mismo, } \quad (x + y)^2 = cxe^{y/x}. \qquad \blacksquare$$

Aunque se puede usar cualquiera de las sustituciones en toda ecuación diferencial homogénea, en la práctica probaremos con $x = vy$ cuando la función $M(x, y)$ sea más simple que $N(x, y)$. También podría suceder que después de aplicar una sustitución, nos encontráramos con integrales difíciles o imposibles de evaluar en forma cerrada; en este caso, si cambiamos la variable sustituida quizá podamos tener un problema más fácil de resolver.

Uso de sustituciones: la ecuación de Bernoulli La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = f(x)\,y^n, \qquad (2)$$

en que n es cualquier número real, es la **ecuación de Bernoulli.** Obsérvese que cuando $n = 0$ y $n = 1$, la ecuación (2) es lineal. Cuando $n \neq 0$ y $n \neq 1$, la sustitución $u = y^{1-n}$ reduce cualquier ecuación de la forma (2) a una ecuación lineal.

EJEMPLO 2 **Solución de una ecuación diferencial de Bernoulli**

Resolver $x\frac{dy}{dx} + y = x^2y^2$.

SOLUCIÓN Primero reformulamos la ecuación como sigue:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$$

dividiéndola entre x. A continuación sustituimos, con $n = 2$,

$$y = u^{-1} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = -u^{-2}\frac{du}{dx} \quad \leftarrow \text{regla de la cadena}$$

en la ecuación dada, y simplificamos. El resultado es

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = -x.$$

El factor integrante para esta ecuación lineal en, por ejemplo $(0, \infty)$, es

$$e^{-\int dx/x} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}.$$

Integramos

$$\frac{d}{dx}[x^{-1}u] = -1$$

y obtenemos $x^{-1}u = -x + c$, o sea, $u = -x^2 + cx$.

Como $y = u^{-1}$, entonces $y = 1/u$ y, en consecuencia, una solución de la ecuación es

$$y = \frac{1}{-x^2 + cx}.$$

■

Nótese que en el ejemplo 2 no hemos llegado a la solución general de la ecuación diferencial no lineal original, porque $y = 0$ es una solución singular de esa ecuación.

Uso de sustituciones: reducción a separación de variables Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C) \tag{3}$$

siempre se puede reducir a una ecuación con variables separables, con la sustitución $u = Ax + By + C$, $B \neq 0$. En el ejemplo 3 mostraremos esa técnica.

EJEMPLO 3 Empleo de una sustitución

Resolver $\dfrac{dy}{dx} = (-5x + y)^2 - 4$.

SOLUCIÓN Si hacemos que $u = -5x + y$, entonces $du/dx = -5 + dy/dx$, y así la ecuación dada se transforma en

$$\frac{du}{dx} + 5 = u^2 - 4 \quad \text{o sea} \quad \frac{du}{dx} = u^2 - 9.$$

Separamos variables, empleamos fracciones parciales e integramos:

$$\frac{du}{(u-3)(u+3)} = dx$$

$$\frac{1}{6}\left[\frac{1}{u-3} - \frac{1}{u+3}\right] = dx$$

$$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{u-3}{u+3}\right| = x + c_1$$

$$\frac{u-3}{u+3} = e^{6x+6c_1} = ce^{6x}. \qquad \leftarrow \text{se sustituye } e^{6c_1} \text{ por } c$$

Al despejar u de la última ecuación para resustituirla, llegamos a la solución

$$u = \frac{3(1 + ce^{6x})}{1 - ce^{6x}} \quad \text{o sea} \quad y = 5x + \frac{3(1 + ce^{6x})}{1 - ce^{6x}}. \qquad \blacksquare$$

EJERCICIOS 2.4

Resuelva cada una de las ecuaciones en los problemas 1 a 10, con la sustitución apropiada.

1. $(x - y)\,dx + x\,dy = 0$
2. $(x + y)\,dx + x\,dy = 0$
3. $x\,dx + (y - 2x)\,dy = 0$
4. $y\,dx = 2(x + y)\,dy$
5. $(y^2 + yx)\,dx - x^2\,dy = 0$
6. $(y^2 + yx)\,dx + x^2\,dy = 0$
7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - x}{y + x}$
8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 3y}{3x + y}$
9. $-y\,dx + (x + \sqrt{xy})\,dy = 0$
10. $x\dfrac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

Resuelva la ecuación homogénea de cada uno de los problemas 11 a 14, sujeta a la condición inicial respectiva.

11. $xy^2\dfrac{dy}{dx} = y^3 - x^3, \quad y(1) = 2$
12. $(x^2 + 2y^2)\dfrac{dx}{dy} = xy, \quad y(-1) = 1$
13. $(x + ye^{y/x})\,dx - xe^{y/x}\,dy = 0, \quad y(1) = 0$

14. $y\,dx + x(\ln x - \ln y - 1)\,dy = 0, \quad y(1) = e$

En los problemas 15 a 20 resuelva la ecuación respectiva de Bernoulli empleando una sustitución adecuada.

15. $x\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{y^2}$

16. $\dfrac{dy}{dx} - y = e^x y^2$

17. $\dfrac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$

18. $x\dfrac{dy}{dx} - (1 + x)y = xy^2$

19. $x^2\dfrac{dy}{dx} + y^2 = xy$

20. $3(1 + x)\dfrac{dy}{dx} = 2xy(y^3 - 1)$

En los problemas 21 y 22, resuelva la respectiva ecuación de Bernoulli sujeta a la condición inicial indicada.

21. $x^2\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4, \quad y(1) = \dfrac{1}{2}$

22. $y^{1/2}\dfrac{dy}{dx} + y^{3/2} = 1, \quad y(0) = 4$

Use el procedimiento indicado en el ejemplo 3 para resolver cada ecuación de los problemas **23** a 28.

23. $\dfrac{dy}{dx} = (x + y + 1)^2$

24. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - x - y}{x + y}$

25. $\dfrac{dy}{dx} = \tan^2(x + y)$

26. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(x + y)$

27. $\dfrac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$

28. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + e^{y-x+5}$

En los problemas 29 y 30 resuelva la ecuación respectiva, sujeta a la condición inicial indicada.

29. $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x + y), \quad y(0) = \dfrac{\pi}{4}$

30. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x + 2y}{3x + 2y + 2}, \quad y(-1) = -1$

Problemas para discusión

31. Explique por qué siempre es posible expresar cualquier ecuación diferencial homogénea, $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ en la forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx} = G\left(\frac{x}{y}\right).$$

Puede comenzar escribiendo algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales que tengan esas formas. ¿Estas formas generales sugieren la causa de que las sustituciones $y = ux$ y $x = vy$ sean adecuadas para las ecuaciones diferenciales homogéneas de primer orden?

32. La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$$

se llama ecuación de Ricatti.

a) Una ecuación de Ricatti se puede resolver con dos sustituciones consecutivas, ***siempre*** y cuando conozcamos una solución particular, y_1, de la ecuación. Primero emplee la sustitución $y = y_1 + y$, y después describa cómo continuar.

b) Halle una familia monoparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2,$$

en donde $y_1 = 2/x$ es una solución conocida de la ecuación.

Ejercicios de repaso

En los problemas 1 a 14 clasifique (no resuelva) el tipo de ecuación diferencial: si es separable, exacta, homogénea o de Bernoulli. Algunas ecuaciones pueden ser de más de un tipo.

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x}$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y - x}$

3. $(x + 1)\frac{dy}{dx} = -y + 10$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{}$

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + y}{x^2 + x}$

6. $\frac{dy}{dx} = 5y + y^2$

7. $y\,dx = (y - xy^2)\,dy$

8. $x\frac{dy}{dx} = ye^{x/y} - x$

9. $xyy' + y^2 = 2x$

10. $2xyy' + y^2 = 2x^2$

11. $y\,dx + x\,dy = 0$

12. $\left(x^2 + \frac{2y}{x}\right)dx = (3 - \ln x^2)\,dy$

13. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1$

14. $\frac{y}{x^2}\frac{dy}{dx} + e^{2x^3 + y^2} = 0$

Resuelva la ecuación diferencial en los problemas 15 a 20.

15. $(y^2 + 1)\,dx = y\sec^2 x\,dy$

16. $y(\ln x - \ln y)\,dx = (x \ln x - x \ln y - y)\,dy$

17. $(6x + 1)y^2\frac{dy}{dx} + 3x^2 + 2y^3 = 0$

18. $\frac{dx}{dy} = -\frac{4y^2 + 6xy}{3y^2 + 2x}$

19. $t\frac{dQ}{dt} + Q = t^4 \ln t$

20. $(2x + y + 1)y' = 1$

Resuelva cada uno de los problemas de valor inicial 21 a 26.

21. $\frac{y}{t}\frac{dy}{dt} = \frac{e^t}{\ln y}, \quad y(1) = 1$

22. $tx\frac{dx}{dt} = 3x^2 + t^2, \quad x(-1) = 2$

23. $(x^2 + 4)\dfrac{dy}{dx} + 8xy = 2x,\ y(0) = -1$

24. $x\dfrac{dy}{dx} + 4y = x^4y^2,\ y(1) = 1$ **25.** $y' = e^{2y-x},\ y(0) = 0$

26. $(2r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta + r\cos\theta)\,d\theta + (4r + \operatorname{sen}\theta - 2r\cos^2\theta)\,dr = 0,$
$r\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$

CAPÍTULO

3

MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

3.1 Ecuaciones lineales
3.2 Ecuaciones no lineales
3.3 Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales
Ejercicios de repaso

En la sección 1.3 explicamos que muchos modelos matemáticos, como los del crecimiento demográfico, la desintegración radiactiva, el interés compuesto continuamente, las reacciones químicas, un líquido que sale por un agujero en un tanque, la velocidad de caída de un cuerpo, la rapidez de memorización y la corriente en un circuito en serie, son ecuaciones diferenciales de primer orden. Ahora ya podemos resolver algunas de las ecuaciones diferenciales, lineales y no lineales, que surgen con frecuencia en las aplicaciones. El capítulo termina con el tema de los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden como modelos matemáticos.

3.1 ECUACIONES LINEALES

■ *Crecimiento y decaimiento exponencial* ■ *Periodo medio*
■ *Datación con radiocarbono* ■ *Ley de Newton del enfriamiento* ■ *Mezclas*
■ *Circuitos en serie* ■ *Término transitorio* ■ *Término de estado estable*

Crecimiento y decaimiento El problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = kx, \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

en donde k es una constante de proporcionalidad, se emplea como modelo de distintos fenómenos donde intervienen **crecimiento o decrecimiento (desintegración).** En la sección 1.3 describimos que, en biología, se ha observado que en cortos periodos la tasa de crecimiento de algunas poblaciones (como las de bacterias o de animales pequeños) es proporcional a la población presente en cualquier momento. Si conocemos una población en cierto momento inicial arbitrario, que podemos considerar definido por $t = 0$, la solución de (1) nos sirve para predecir la población en el futuro -esto es, para $t > 0$-. En física, un problema de valor inicial como las ecuaciones (1) puede servir de modelo para calcular aproximadamente la cantidad residual de una sustancia que se desintegra o decae en forma radiactiva. Esa ecuación diferencial (1) también puede describir la temperatura de un objeto que se enfría. En química, la cantidad residual de una sustancia en ciertas reacciones se apega a la ecuación (1).

La constante de proporcionalidad k, en (1), se puede hallar resolviendo el problema de valor inicial, con una determinación de x en un momento $t_1 > t_0$.

EJEMPLO 1 Crecimiento bacteriano

Un cultivo tiene una cantidad inicial N_0 de bacterias. Cuando $t = 1$ h, la cantidad medida de bacterias es $\frac{3}{2}N_0$. Si la razón de reproducción es proporcional a la cantidad de bacterias presentes, calcule el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial de los microorganismos.

SOLUCIÓN Primero se resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = kN \tag{2}$$

sujeta a $N(0) = N_0$. A continuación se define la condición empírica $N(1) = \frac{3}{2}N_0$ para hallar k, la constante de proporcionalidad.

Con ello, la ecuación (2) es separable y lineal, a la vez. Cuando se escribe en la forma

$$\frac{dN}{dt} - kN = 0,$$

podemos ver por inspección que el factor integrante es e^{-kt}. Multiplicamos ambos lados de la ecuación por ese factor y el resultado inmediato es

$$\frac{d}{dt}[e^{-kt}N] = 0.$$

Integramos ambos lados de la última ecuación para llegar a la solución general

$$e^{-kt}N = c, \text{ o sea } N(t) = ce^{-kt}.$$

Cuando $t = 0$, $N_0 = ce^0 = c$ y, por consiguiente, $N(t) = N_0e^{kt}$. Cuando $t = 1$, entonces $\frac{3}{2}N_0 = N_0e^k$, o bien $e^k = \frac{3}{2}$. Con la última ecuación obtenemos $k = \ln \frac{3}{2} = 0.4055$. Así

$$N(t) = N_0e^{0.4055t}.$$

Para establecer el momento en que se triplica la cantidad de bacterias, despejamos t de $3N_0 = N_0e^{0.4055t}$; por consiguiente, $0.4055t = \ln 3$, y así

$$t = \frac{\ln 3}{0.4055} \approx 2.71 \text{ h.}$$

Véase la figura 3.1. ■

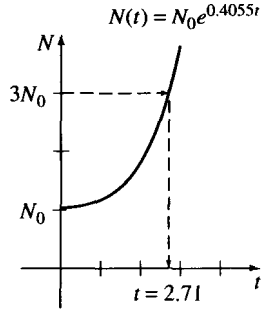


FIGURA 3.1

En el ejemplo 1 obsérvese que la cantidad real, N_0, de bacterias presentes en el momento $t = 0$, no influyó para la definición del tiempo necesario para que el cultivo se triplicara. El tiempo requerido para triplicar una población inicial de 100 o 1 000 000 bacterias siempre es de unas 2.71 horas.

Como muestra la figura 3.2, la función exponencial e^{kt} se incrementa al aumentar t, cuando $k > 0$, y disminuye al crecer t cuando $k < 0$; por ello, los problemas de describir el crecimiento

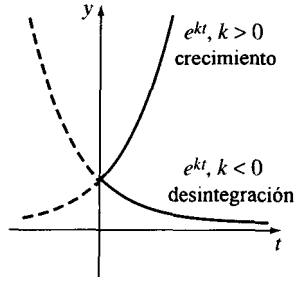


FIGURA 3.2

(sea de poblaciones, bacterias o capitales) se caracterizan con un valor positivo de k, mientras que cuando interviene un decrecimiento (como la desintegración radiactiva), se tiene un valor negativo de **k.** Por lo anterior, **se** dice que k **es** una **constante de crecimiento (k > 0) o** una **constante de descrecimiento** o de declinación ($k < 0$).

Periodo medio En física, el periodo medio es una medida de la estabilidad de una sustancia radiactiva. Es, simplemente, el tiempo que transcurre para que se desintegre o transmute la mitad de los átomos en una muestra inicial, A_0, y se conviertan en átomos de otro elemento. Mientras mayor sea su semivida, más estable es una sustancia; por ejemplo, la semivida del radio Ra-226, muy radiactivo, es unos 1700 años. En ese lapso, la mitad de determinada cantidad de Ra-226 se transmuta y forma radón, Rn-222. El isótopo más común del uranio, el U-238, tiene periodo medio de 4500 millones de años. Es el tiempo que tarda en transmutarse la mitad de una cantidad de U-238 en plomo 206.

EJEMPLO 2 **Periodo medio del plutonio**

Un reactor de cría convierte al uranio 238, relativamente estable, en plutonio 239, un isótopo radiactivo. Al cabo de 15 años, se ha desintegrado el 0.043% de la cantidad inicial, A_0, de una muestra de plutonio. Calcule el periodo medio de ese isótopo, si la razón de desintegración es proporcional a la cantidad presente.

SOLUCIÓN Sea A(t) la cantidad de plutonio que queda en cualquier momento t. Como en el ejemplo 1, la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dA}{dt} = kA, \qquad A(0) = A_0$$

es $A(t) = A_0e^{kt}$. Si se ha desintegrado el 0.043% de los átomos de A_0, queda el 99.957%. Para calcular la constante k (o declinación) empleamos $0.99957A_0 = A(15)$, esto es, $099957A_0 = A_0e^{15k}$. Despejamos k y tenemos $k = \frac{1}{15}\ln 0.99957 = -0.00002867$. En consecuencia,

$$A(t) = A_0\, e^{-0.00002867t}.$$

Si el periodo medio es el valor que corresponde a $A(t) = A_0/2$, despejando a t se obtiene $A_0/2 = A_0e^{-0.00002867t}$, es decir, $\frac{1}{2} = e^{-0.00002867t}$. De acuerdo con esta ecuación,

$$t = \frac{\ln 2}{0.00002867} \approx 24{,}180 \text{ años}$$ ■

Datación con radiocarbono Alrededor de 1950, el químico Willard Libby inventó un método que emplea al carbono radiactivo para determinar las edades aproximadas de fósiles. La teoría de la **datación (fechamiento o fechado) con radiocarbono,** se basa en que el isótopo carbono 14 se produce en la atmósfera por acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno. La razón de la cantidad de C-14 al carbono ordinario en la atmósfera parece ser constante y, en consecuencia, la cantidad proporcional del isótopo presente en todos los organismos vivos es igual que la de la atmósfera. Cuando muere un organismo la absorción del C-14 sea por

respiración o alimentación cesa. Así, si se compara la cantidad proporcional de C- 14 presente, por ejemplo en un fósil, con la relación constante que existe en la atmosfera, es posible obtener una estimación razonable de su antigüedad. El método se basa en que se sabe que el periodo medio del C-14 radiactivo es, aproximadamente, 5600 años. Por este trabajo, Libby ganó el Premio Nobel de química en 1960. Su método se usó para fechar los muebles de madera en las tumbas egipcias y las envolturas de lino de los rollos del Mar Muerto.

EJEMPLO 3 **Antigüedad de un fósil**

Se analizó un hueso fosilizado y se encontró que contenía la centésima parte de la cantidad original de C-14. Determine la edad del fósil.

SOLUCIÓN El punto de partida es, de nuevo, $A(t) = A_0e^{kt}$. Para calcular el valor de la constante de decaimiento aplicamos el hecho que $A_0/2 = A(5600)$, o sea, $A_0/2 = A_0e^{5600k}$. Entonces, $5600k = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$, de donde $k = -(\ln 2)/5600 = -0.00012378$; por consiguiente

$$A(t) = A_0e^{-0.00012378t}.$$

Tenemos, para $A(t) = A_0/1000$, que $A_0/1000 = A_0e^{-0.00012378t}$, de modo que $-0.00012378t = \ln \frac{1}{1000} = -\ln 1000$. Así

$$t = \frac{\ln 1000}{0.00012378} \approx 55{,}800 \text{ años}$$

■

En realidad, la edad determinada en el ejemplo 3 está en el límite de exactitud del método. Normalmente esta técnica se limita a unos 9 periodos medios del isótopo, que son unos 50 000 anos. Una razón para ello es que el análisis químico necesario para una determinación exacta del C-14 remanente presenta obstáculos formidables cuando se alcanza el punto de $A_0/1000$. También, para este método se necesita destruir una muestra grande del espécimen. Si la medición se realiza en forma indirecta, basándose en la radiactividad existente en la muestra, es muy difícil distinguir la radiación que procede del fósil de la radiación normal de fondo. Pero en últimas fechas, los científicos han podido separar al C-14 del C-12, la forma estable, con los aceleradores de partículas. Cuando se calcula la relación exacta de C-14 a C-12, la exactitud de este método se puede ampliar hasta antigüedades de 70 a 100 000 años. Hay otras técnicas isotópicas, como la que usa potasio 40 y argón 40, adecuadas para establecer antigüedades de varios millones de años. A veces, también es posible aplicar métodos que se basan en el empleo de aminoácidos.

Ley de Newton del enfriamiento En la ecuación (10) de la sección 1.3 vimos que la formulación matemática de la ley empírica de Newton, relativa al enfriamiento de un objeto, se expresa con la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \tag{3}$$

en que k es una constante de proporcionalidad, T(r) es la temperatura del objeto cuando $t > 0$ y T_m es la temperatura ambiente; o sea, la temperatura del medio que rodea al objeto. En el ejemplo 4 supondremos que T_m es constante.

EJEMPLO 4 **Enfriamiento de un pastel**

Al sacar un pastel del horno, su temperatura es 300°F. Después de 3 minutos, 200°F. ¿En cuanto tiempo se enfriará hasta la temperatura ambiente de 70°F?

SOLUCIÓN En la ecuación (3) vemos que $T_m = 70$. Por consiguiente, debemos resolver el problema de valor inicial

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70), \qquad T(0) = 300 \tag{4}$$

y determinar el valor de k de tal modo que $T(3) = 200$.

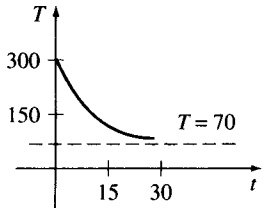
La ecuación (4) es lineal y separable, a la vez. Al separar las variables,

$$\frac{dT}{T - 70} = k\,dt,$$

cuyo resultado es $\ln|T - 70| = kt + c_1$, y así $T = 70 + c_2e^{kt}$. Cuando $t = 0$, $T = 300$, de modo que $300 = 70 + c_2$ define a $c_2 = 230$. Entonces, $T = 70 + 230\,e^{kt}$. Por ultimo, la determinación $T(3) = 200$ conduce a $e^{3k} = \frac{13}{23}$, o sea, $k = \frac{1}{3}\ln\frac{13}{23} = -0.19018$. Así

$$T(t) = 70 + 230e^{-0.19018t}. \tag{5}$$

Observamos que la ecuación (5) no tiene una solución finita a $T(t) = 70$ porque $\lim_{t \to \infty} T(t) = 70$; no obstante, en forma intuitiva esperamos que el pastel se enfríe al transcurrir un intervalo razonablemente largo. ¿Cuán largo es "largo"? No nos debe inquietar el hecho de que el modelo (4) no se apegue mucho a nuestra intuición física. Las partes *a*) y *b*) de la figura 3.3 muestran que el pastel estará a la temperatura ambiente pasada una media hora. ■



(a)

$T(t)$	t (min)
75"	20.1
74"	21.3
73"	22.8
72"	24.9
71"	28.6
70.5"	32.3

(b)

FIGURA 3.3

Mezclas Al mezclar dos fluidos, a veces se originan ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Cuando describimos la mezcla de dos salmueras **(Sec. 1.3),** supusimos que la razón con que cambia la cantidad de sal, A'(r), en el tanque de mezcla es una razón neta:

$$\frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix} \text{razón con que} \\ \text{entra la sustancia} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{razón con que} \\ \text{sale la sustancia} \end{pmatrix} = R_1 - R_2 \qquad \textbf{(6)}$$

En el ejemplo 5 resolveremos la ecuación (12) de la sección 1.3.

EJEMPLO 5 **Mezcla** de dos soluciones de sal

Recordemos que el tanque grande de la sección 1.3 contenía inicialmente 300 galones de una solución de sahnuera. Al tanque entraba y salía sal porque se le bombeaba una solución a un flujo de 3 **gal/min,** se mezclaba con la solución original, y salía del tanque con un flujo de 3 **gal/min.** La concentración de la solución entrante era 2 lb/gal; por consiguiente, la entrada de sal era R_1 = (2 **lb/gal**) . (3 **gal/min**) = 6 **lb/min;** del tanque salía con una razón R_2 = (3 **gal/min**) . (A/300 **lb/gal**) = A/1 OO **lb/min.** A partir de esos datos y de la ecuación (6) obtuvimos la ecuación (12) de la sección 1.3. Surge esta pregunta: si había 50 **lb** de sal disueltas en los 300 galones iniciales, **¿cuánta** sal habrá en el tanque pasado mucho tiempo?

SOLUCIÓN Para hallar A(t), resolvemos el problema de valor inicial

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100}, \qquad A(O) = 50.$$

Aquí observamos que la condición adjunta es la cantidad inicial de sal, A(O) = 50, y no la cantidad inicial de líquido. Como el factor integrante de esta ecuación diferencial lineal es $e^{t/100}$, podemos formular la ecuación así:

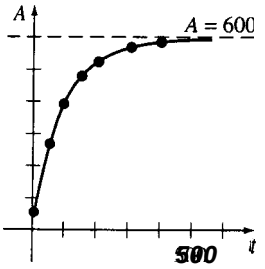
$$\frac{d}{dt}[e^{t/100} A] = 6e^{t/100}.$$

Al integrar esta ecuación y despejar A se obtiene la solución general $A = 600 + ce^{-t/100}$. Cuando t = 0, A = 50, de modo que c = -550. Entonces, la cantidad de sal en el tanque en el momento t está definida por

$$A(t) = 600 - 550e^{-t/100}. \qquad \textbf{(7)}$$

Esta solución se empleó para formar la tabla de la figura **3.4b).** En la ecuación (7) y en la figura 3.4 también se puede ver, que $A \to 600$ cuando $t \to \infty$. Esto es lo que cabría esperar en este caso; pasado un largo tiempo, la cantidad de libras de sal en la solución debe ser (300 **gal)(2 lb/gal)** = 600 lb. ■

En el ejemplo 5 supusimos que la razón con que entra la solución al tanque es la misma que la razón con que sale. Sm embargo, el caso no necesita ser siempre el mismo; la sahnuera mezclada se puede sacar a un flujo mayor o menor que el flujo de entrada de la otra solución; por ejemplo, si la solución bien mezclada del ejemplo 5 sale a un flujo menor, digamos de 2 **gal/min,** se acumulará líquido en el tanque a una tasa de (3 - 2) **gal/min** = 1 **gal/min.** Cuando



(a)

t (min)	A (lb)
50	266.41
100	397.67
150	477.27
200	525.57
300	572.62
400	589.93

(b)

FIGURA 3.4

hayan transcurrido t minutos, en el tanque habrán 300 + t galones de salmuera. La razón con que sale la sal es, entonces,

$$R_2 = (2 \text{ gal/min})\left(\frac{A}{300 + t} \text{ lbigal}\right).$$

Así, la ecuación (6) se transforma en

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{2A}{300 + t} \quad \text{o sea} \quad \frac{dA}{dt} + \frac{2}{300 + t}A = 6.$$

El lector debe comprobar que la solución de la última ecuación, sujeta a A(O) = 50, es

$$A(t) = 600 + 2t - (4.95 \times 10^7)(300 + t)^{-2}.$$

Circuitos en serie Cuando un circuito en serie sólo contiene un resistor y un inductor (circuito LR), la segunda ley de Kirchhoff establece que la suma de las caídas de voltaje a través del inductor $(L(di/dt))$ y del resistor (iR) es igual al voltaje aplicado, (E(t)), al circuito (Fig. 3.5).

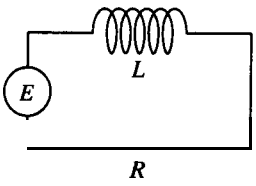


FIGURA 3.5 Circuito LR en serie

Con lo anterior se obtiene la ecuación diferencial lineal que describe la corriente $i(t)$,

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t), \tag{8}$$

en que L y R son las constantes conocidas como inductancia y resistencia, respectivamente. La corriente $i(t)$ se llama, también, **respuesta** del sistema.

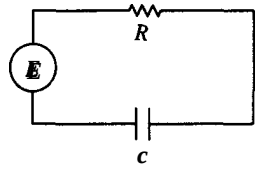


FIGURA 3.6 Circuito RC en serie

La caída de voltaje a través de un capacitor de capacitancia C es $q(t)/C$, donde q es la carga del capacitor; por lo tanto, para el circuito en serie de la figura 3.6 (circuito RC), la segunda ley de Kirchhoff establece

$$Ri + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{9}$$

Pero la corriente i y la carga q se relacionan mediante $i = dq/dt$, así, la ecuación (9) se transforma en la ecuación diferencial lineal

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{10}$$

EJEMPLO 6 Circuito en serie

Un acumulador de 12 volts se conecta a un circuito en serie LR, con una inductancia de $\frac{1}{2}$ henry y una resistencia de 10 ohms. Determinar la corriente i, si la corriente inicial es cero.

SOLUCIÓN Lo que debemos resolver, según la ecuación (8), es

$$\frac{1}{2}\frac{di}{dt} + 10i = 12$$

sujeta a $i(0) = 0$. Primero multiplicamos la ecuación diferencial por 2, y vemos que el factor integrante es e^{20t}. A continuación lo sustituimos

$$\frac{d}{dt}[e^{20t}i] = 24e^{20t}.$$

Al integrar cada lado de esta ecuación y despejar i obtenemos $i = \frac{6}{5} + ce^{-20t}$. Si $i(0) = 0$, entonces $0 = \frac{6}{5} + c$, o bien $c = -\frac{6}{5}$; por consiguiente, la respuesta es

$$i(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}. \qquad \blacksquare$$

A partir de la ecuación (4) de la sección 2.3, podemos formular una solución general de (8):

$$i(t) = \frac{e^{-(R/L)t}}{L}\int e^{(R/L)t}E(t)\,dt + ce^{-(R/L)t}. \tag{11}$$

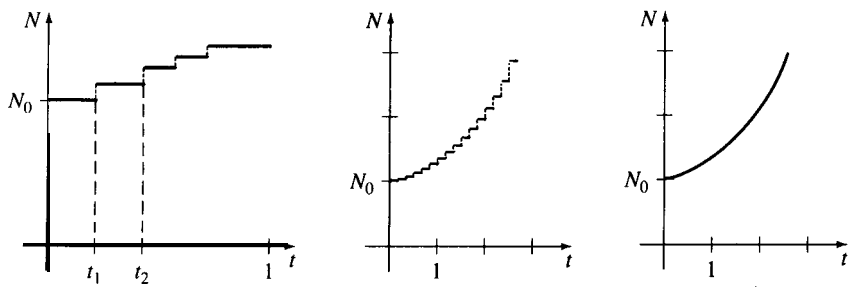
En especial, cuando $E(t) = E_0$ es una constante, la ecuación (ll) se transforma en

$$i(t) = \frac{E_0}{R} + ce^{-(R/L)t}. \tag{12}$$

Observamos que cuando $t \to \infty$, el segundo término de la ecuación (12) tiende a cero. A ese término **se** le suele llamar **término transitorio;** los demás miembros **se** llaman parte de **estado estable** (o estado estacionario) de la solución. En este caso, E_0/R también se denomina **corriente de estado estable** o de estado estacionario; cuando el tiempo adquiere valores grandes, resulta que la corriente está determinada tan sólo por la ley de Ohm, $E = iR$.

Observación

Examinemos la ecuación diferencial en el ejemplo 1, que describe el crecimiento de un cultivo de bacterias. La solución, $N(t) = N_0e^{0.4055t}$, del problema de valor inicial $dN/dt = kN$, $N(t_0) = N_0$ es una función continua; pero en el ejemplo se habla de una población de bacterias, y el sentido común nos dice que N sólo adopta valores enteros positivos. Además, la población no crece en forma continua, -esto es, a cada segundo, microsegundo, etc.- como predice la función $N(t) = N_0e^{0.4055t}$; puede haber intervalos, $[t_1, t_2]$, durante los que no haya crecimiento alguno. Quizá, entonces, la gráfica de la figura 3.7a) sea una descripción más real de N que la gráfica de una función exponencial. Muchas veces es más cómodo que exacto usar una función continua en la descripción de un fenómeno discreto. Sin embargo, para ciertos fines nos podemos dar por satisfechos si el modelo describe con gran exactitud el sistema, considerado macroscópicomente en el transcurso del tiempo, como en las figuras 3.7b) y c), y no considerado microscópicamente.



(4 (b) (c)

FIGURA 3.7

EJERCICIOS 3.1

1. Se sabe que la población de cierta comunidad aumenta eon una razón proporcional a la cantidad de personas que tiene en cualquier momento. Si la población se duplicó en cinco anos, ¿en cuanto tiempo se triplicará y cuadruplicará?
2. Suponga que la población de la comunidad del problema 1 es de 10 000 después de tres anos. ¿Cuál era la población inicial? ¿Cuál será en 10 anos?
3. La población de una comunidad crece con una tasa proporcional a la población en cualquier momento. Su población inicial es 500 y aumenta el 15% en 10 anos. ¿Cuál será la población pasados 30 anos?
4. En cualquier momento dado la cantidad de bacterias en un cultivo crece a una tasa proporcional a las bacterias presentes. Al cabo de tres horas se observa que hay 400 individuos. Pasadas 10 horas, hay 2000 especímenes. ¿Cuál era la cantidad inicial de bacterias?
5. El Pb-209, isótopo radiactivo del plomo, se desintegra con una razón proporcional a la cantidad presente en cualquier momento y tiene un periodo medio de vida de 3.3 horas. Si al principio había 1 gramo de plomo, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que se desintegre el 90%?
6. Cuando $t = 0$, había 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Al cabo de 6 horas, esa cantidad disminuyó el 3%. Si la razón de desintegración, en cualquier momento, es proporcional a la cantidad de la sustancia presente, calcule la cantidad que queda después de 2 horas.
7. Calcule el periodo medio de vida de la sustancia radiactiva del problema 6.
8. a) El problema de valor inicial $dA/dt = kA$, $A(0) = A_0$ es el modelo de desintegración de una sustancia radiactiva. Demuestre que, en general, el periodo medio de vida, T, de la sustancia es $T = -(\ln 2)/k$.
   b) Demuestre que la solución del problema de valor inicial en la parte a) se puede escribir $A(t) = A_0 2^{-t/T}$.
9. Cuando pasa un rayo vertical de luz por una sustancia transparente, la razón con que decrece su intensidad Z es proporcional a $Z(t)$, donde t representa el espesor, en pies, del medio. En agua de mar clara, la intensidad a 3 ft bajo la superficie, es el 25% de la intensidad inicial I_0 del rayo incidente. ¿Cuál es la intensidad del rayo a 15 ft bajo la superficie?
10. Cuando el interés se capitaliza (o compone) continuamente, en cualquier momento la cantidad de dinero, S, aumenta a una tasa proporcional a la cantidad presente: $dS/dt = rS$, donde r es la tasa de interés anual [Ec. (6), Sec. 1.31.
    a) Calcule la cantidad *reunida* al término de cinco anos, cuando se depositan $5000 en una cuenta de ahorro que rinde el $5\frac{3}{4}\%$ de interés anual compuesto continuamente.
    b) ¿En cuantos años se habrá duplicado el capital inicial?
    c) Con una calculadora compare la cantidad obtenida en la parte a) con el valor de

$$S = 5000\left(1 + \frac{0.0575}{4}\right)^{5(4)}.$$

Este valor representa la cantidad reunida cuando el interés se capitaliza ca& trimestre.

11. En un trozo de madera quemada o carbón vegetal se determinó que el 85.5% de su C-14 se había desintegrado. Con la información del ejemplo 3 determine la edad aproximada de

la madera. Éstos son precisamente los datos que usaron los arqueólogos para fechar los murales prehistóricos de una caverna en Lascaux, Francia.

12. Un termómetro se lleva de un recinto interior hasta el ambiente exterior, donde la temperatura del aire es 5°F. Después de un minuto, el termómetro indica 55°F, y después de cinco marca 30°F. ¿Cuál era la temperatura del recinto interior?

13. Un termómetro se saca de un recinto donde la temperatura del aire es 70°F y se lleva al exterior, donde la temperatura es 10°F. Pasado $\frac{1}{2}$ minuto el termómetro indica 50°F. ¿Cuál es la lectura cuando $t = 1$ min? ¿Cuánto tiempo se necesita para que el termómetro llegue a 15°F?

14. La fórmula (3) también es válida cuando un objeto absorbe calor del medio que le rodea. Si una barra metálica pequeña, cuya temperatura inicial es 20°C, se deja caer en un recipiente con agua hirviente, ¿cuánto tiempo tardara en alcanzar 90°C, si se sabe que su temperatura aumentó 2°C en un segundo? ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a 98°C?

15. Se aplica una fuerza electromotriz de 30 v aun circuito en serie LR con 0.1 h de inductancia y 50 Ω de resistencia. Determine la corriente i(t), si $i(0) = 0$. Halle la corriente cuando $t \to \infty$.

16. Resuelva la ecuación (8) suponiendo que E(t) = E_0 sen ωt y que i(O) = i_0.

17. Se aplica una fuerza electromotriz de 100 volts a un circuito en serie RC, donde la resistencia es 200 Ω y la capacitancia es 10^{-4} f. Determine la carga $q(t)$ del capacitor, si $q(0) = 0$. Halle la corriente $i(t)$.

18. Se aplica una fuerza electromotriz de 200 v a un circuito en serie RC, en que la resistencia es 1000 Ω y la capacitancia es 5 x 10" f. Determine la carga $q(t)$ del capacitor, si i(O) = 0.4 amp. Halle la carga cuando $t \to \infty$.

19. Se aplica una fuerza electromotriz

$$E(t) = \begin{cases} 120, & 0 \le t \le 20 \\ 0, & t > 20 \end{cases}$$

a un circuito en serie LR, en que la inductancia es 20 h y la resistencia es 2 Ω. Determine la corriente, i(r), si $i(0) = 0$.

20. Suponga que un circuito en serie RC tiene un resistor variable. Si la resistencia, en cualquier momento t es $R = k_1 + k_2 t$, donde k_1 y $k_2 > 0$ son constantes conocidas, la ecuación (10) se transforma en

$$(k_1 + k_2 t)\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t).$$

Demuestre que si E(t) = E_0 y $q(0) = q_0$, entonces

$$q(t) = E_0 C + (q_0 - E_0 C)\left(\frac{k_1}{k_1 + k_2 t}\right)^{1/Ck_2}$$

21. Un tanque contiene 200 1 de agua en que se han disuelto 30 g de sal y le entran 4 L/min de solución con 1 g de sal por litro; está bien mezclado, y de él sale líquido con el mismo flujo (4 L/min). Calcule la cantidad A(t) de gramos de sal que hay en el tanque en cualquier momento t.

22. Resuelva el problema 21 suponiendo que entra agua pura.

23. Un tanque tiene 500 gal de agua pura y le entra salmuera con 2 lb de sal por galón a un flujo de 5 gal/min. El tanque está bien mezclado, y sale de él el mismo flujo de solución. Calcule la cantidad A(t) de libras de sal que hay en el tanque en cualquier momento t.
24. Resuelva el problema 23 suponiendo que la solución sale a un flujo de 10 gal/min, permaneciendo igual lo demás. ¿Cuándo se vacía el tanque?
25. Un tanque está parcialmente lleno con 100 galones de salmuera, con 10 lb de sal disuelta. Le entra salmuera con $\frac{1}{2}$ lb de sal por galón a un flujo de 6 gal/min. El contenido del tanque está bien mezclado y de él sale un flujo de 4 gal/min de solución. Calcule la cantidad de libras de sal que hay en el tanque a los 30 minutos.
26. En el ejemplo 5, el tamaño del tanque con la solución salina no apareció entre los datos. Como se describió en la página 78 el flujo con que entra la solución al tanque es igual, pero la salmuera sale con un flujo de 2 gal/min. Puesto que la salmuera se acumula en el tanque a una rapidez de 4 gal/min, en cualquier tanque finito terminara derramándose. Suponga que el tanque esta abierto por arriba y que su capacidad total es de 400 galones.
    a) ¿Cuándo se derramará el tanque?
    b) ¿Cuántas libras de sal habrá en el tanque cuando se comienza a derramar?
    c) Suponga que el tanque se derrama, que la salmuera continúa entrando al flujo de 3 gal/min, que el contenido está bien mezclado y que la solución sigue saliendo a un flujo de 2 gal/min. Determine un método para calcular la cantidad de libras de sal que hay en el tanque cuando $t = 150$ min.
    d) Calcule las libras de sal en el tanque cuando $t \to \infty$. ¿Su respuesta coincide con lo que cabría esperar?
    e) Use una graficadora para trazar la variación de $A(t)$ durante el intervalo $[0, \infty)$.
27. Una ecuación diferencial que describe la velocidad v de una masa m en caída sujeta a una resistencia del aire proporcional a la velocidad instantánea es

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

en que k es una constante de proporcionalidad positiva.
    a) Resuelva la ecuación, sujeta a la condición inicial v(O) = v_0.
    b) Calcule la velocidad límite (o terminal) de la masa.
    c) Si la distancia s se relaciona con la velocidad por medio de ds/dt = v, deduzca una ecuación explícita para s, si también se sabe que $s(0) = s_0$.
28. La razón con que se disemina una medicina en el torrente sanguíneo se describe con la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = r - kx,$$

r y k son constantes positivas. La función $x(t)$ describe la concentración del fármaco en sangre en el momento t. Determine el valor límite de x(t) cuando $t \to \infty$. ¿En cuánto tiempo la concentración es la mitad del valor límite? Suponga que $x(0) = 0$.
29. En un modelo demográfico de la población $P(t)$ de una comunidad, se supone que

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dB}{dt} - \frac{dD}{dt},$$

en donde dB/dt y dD/dt son las tasas de natalidad y mortalidad, respectivamente.

a) Determine P(t) si

$$\frac{dB}{dt} = k_1 P \quad y \quad \frac{dD}{dt} = k_2 P.$$

b) Analice los casos $k_1 > k_2$, $k_1 = k_2$ y $k_1 < k_2$.

30. La ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = (k \cos t)P,$$

en que k es una constante positiva, se usa con frecuencia para modelar una población que sufre fluctuaciones estacionales anuales. Determine P(t) y grafique la solución. Suponga que $P(0) = P_0$.

31. Cuando se tiene en cuenta lo olvidadizo de un individuo, la rapidez con que memoriza está definida por

$$\frac{dA}{dt} = k_1(M - A) - k_2 A,$$

en que $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, A(t) es la cantidad de material memorizado en el tiempo t, M es la cantidad total por memorizar y M-A es la cantidad que resta por memorizar. Halle $A(t)$ y grafique la solución. Suponga que A(O) = 0. Determine el valor límite de A cuando $t \to \infty$ e interprete el resultado.

32. Cuando todas las curvas de una familia $G(x, y, c_1) = 0$ cortan ortogonalmente todas las curvas de otra familia, $H(x, y, c_2) = 0$, se dice que las familias son **trayectorias ortogonales** entre sí (Fig. 3.8). Si $dy/dx = f(x, y)$ es la ecuación diferencial de una familia, la ecuación diferencial de sus trayectorias ortogonales es $dy/dx = -1/f(x, y)$.

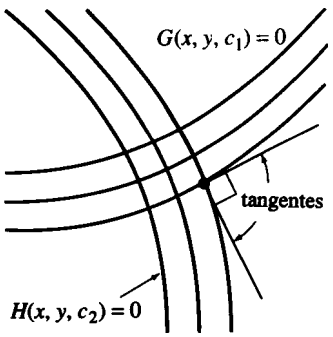


FIGURA 3.8

a) Formule una ecuación diferencial para la familia $y = -x - 1 + c_1 e^x$.

b) Determine las trayectorias ortogonales a la familia de la parte a).

33. Los censos poblacionales en Estados Unidos de 1790 a 1950 aparecen en millones en la tabla adjunta.

Año	Población
1790	3.929
1800	5.308
1810	7.240
1820	9.638
1830	12.866
1840	17.069
1850	23.192
1860	31.433
1870	38.558
1880	50.156
1890	62.948
1900	75.996
1910	91.972
1920	105.711
1930	122.775
1940	131.669
1950	150.697

a) Con esos datos formule un modelo del tipo

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad P(0) = P_0.$$

b) Forme una tabla donde se compare la población predicha por el modelo de la parte a) con los censos de población. Calcule el error y el porcentaje de error para cada par de datos.

Problemas para *discusión*

34. Suponga que un forense que llega a la escena de un crimen ve que la temperatura del cadáver es 82°F. Proponga datos adicionales, pero verosímiles, necesarios para establecer una hora aproximada de la muerte de la víctima, aplicando la ley de Newton del enfriamiento, ecuación (3).

35. El Sr. Pérez coloca al mismo tiempo dos tazas de café en la mesa del desayunador. De inmediato vierte crema en su taza, con una jarra que estaba desde hace mucho en esa mesa. Lee el diario durante cinco minutos y toma su primer sorbo. Llega la Sra. Pérez cinco minutos después de que las tazas fueron colocadas en la mesa, vierte crema la suya y toma un sorbo. Suponga que la pareja agrega exactamente la misma cantidad de crema. ¿Quién y por qué toma su café más caliente? Base su aseveración en ecuaciones matemáticas.

36. Un modelo lineal de la difusión de una epidemia en una comunidad de n personas es el problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = r(n - x), \qquad x(0) = x_0,$$

en donde $x(t)$ representa la población cuando el tiempo es t, $r > 0$ es una rapidez constante y x_0 es un entero positivo pequeño (por ejemplo, 1). Explique por qué, según este modelo,

todos los individuos contraerán la epidemia. Determine en cuanto tiempo la epidemia seguirá su curso.

3.2 ECUACIONES NO LINEALES

■ *Modelos demográficos* ■ *Rapidez relativa de crecimiento* ■ *Ecuación diferencial logística* ■ *Función logística* ■ *Reacciones químicas de segundo orden*

Modelos demográficos Si P(t) es el tamaño de una población en el momento t, el modelo del crecimiento exponencial comienza suponiendo que $dP/dt = kP$ para cierta $k > 0$. En este modelo, la **tasa específica o relativa de crecimiento,** definida por

$$\frac{dP/dt}{P} \tag{1}$$

se supone constante, igual a k. Es difícil encontrar casos reales de un crecimiento exponencial durante largos periodos, porque en cierto momento los recursos limitados del ambiente ejercerán restricciones sobre el crecimiento demográfico. Así, cabe esperar que la razón (1) disminuya a medida que P aumenta de tamaño.

La hipótesis que la tasa con que crece o decrece una población sólo depende del numero presente y no de mecanismos dependientes del tiempo, como los fenómenos estacionales (consúltese el problema 18, en los ejercicios 1.3), se puede enunciar como sigue:

$$\frac{dP/dt}{P} = f(P) \quad \text{o sea} \quad \frac{dP}{dt} = Pf(P). \tag{2}$$

Esta ecuación diferencial, que se adopta en muchos modelos demográficos animales, se llama **hipótesis de dependencia de densidad.**

Ecuación logística Supóngase que un medio es capaz de sostener, como máximo, una cantidad K determinada de individuos en una población. Dicha cantidad se llama **capacidad de sustento,** o de sustentación, del ambiente. Entonces $f(K) = 0$ para la función f en la ecuación (2) y se escribe también $f(0) = r$. En la figura 3.9 vemos tres funciones que satisfacen estas dos

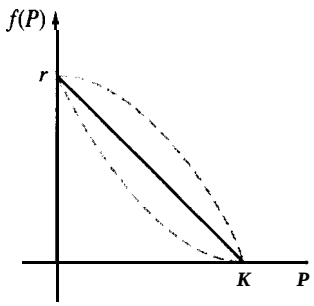


FIGURA 3.9

condiciones. La hipótesis más sencilla es que $f(P)$ es lineal; esto es, que $f(P) = c_1P + c_2$. Si aplicamos las condiciones $f(O) = r$ y $f(K) = 0$, tenemos que $c_2 = r$ y $c_1 = -r/K$, respectivamente, y f adopta la forma $f(P) = r - (r/K)P$. Entonces la ecuación (2) se transforma en

$$\frac{dP}{dt} = P\left(r - \frac{r}{K}P\right). \tag{3}$$

Si redefinimos las constantes, la ecuación no lineal (3) es igual a la siguiente:

$$\frac{dP}{dt} = P(1 - bP). \tag{4}$$

Alrededor de 1840, P. F. **Verhulst,** matemático y biólogo belga, investigó modelos matemáticos para predecir la población humana en varios países. Una de las ecuaciones que estudió fue la (4), con $a > 0$ y $b > 0$. Esa ecuación se llamó **ecuación logística** y su solución se denomina **función logística.** La gráfica de una función logística es la **curva logística.**

La ecuación diferencial $dP/dt = kP$ no es un modelo muy fiel de la población cuando ésta es muy grande. Cuando las condiciones son de sobrepoblación, se presentan efectos negativos sobre el ambiente (como contaminación y exceso de demanda de alimentos y combustible). Esto puede tener un efecto inhibidor en el crecimiento demográfico. Según veremos a continuación, la solución de (4) está acotada cuando $t \to \infty$. Si se rearregla esa ecuación en la forma $dP/dt = aP - bP^2$, el término no lineal $-bP^2$, se puede interpretar como un término de "inhibición" o "competencia." Asimismo, en la mayor parte de las aplicaciones la constante positiva a es mucho mayor que b.

Se ha comprobado que las curvas logísticas predicen con bastante exactitud las pautas de crecimiento de ciertos tipos de bacterias, protozoarios, pulgas de agua (*Daphnia*) y moscas de la fruta (*Drosophila*) en un espacio limitado.

Solución de la ecuación logística Uno de los métodos para resolver la ecuación (4) es por separación de variables. Al descomponer el lado izquierdo de $dP/P(a - bP) = dt$ en fracciones parciales e integrar, se obtiene

$$\left(\frac{1/a}{P} + \frac{b/a}{a - bP}\right)dP = dt$$

$$\frac{1}{a}\ln|P| - \frac{1}{a}\ln|a - bP| = t + c$$

$$\ln\left|\frac{P}{a - bP}\right| = at + ac$$

$$\frac{P}{a - bP} = c_1e^{at}.$$

Como consecuencia de la última ecuación,

$$P(t) = \frac{ac_1e^{at}}{1 + bc_1e^{at}} = \frac{ac_1}{bc_1 + e^{-at}}.$$

Si $P(O) = P_0, P_0 \neq a/b$, llegamos a $c_1 = P_0/(a - bP_0)$ y así, sustituyendo y simplificando, la solución es

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}}. \tag{5}$$

Gráficas de P(t) La forma básica de la gráfica de la función logística $P(t)$ se puede conocer sin mucha dificultad. Aunque la variable t suele representar al tiempo —y casi no nos ocupamos de aplicaciones en que $t < 0$-, tiene cierto interés incluir ese intervalo al presentar las diversas gráficas. Según (5), vemos que

$$P(t) \to \frac{aP_0}{bP_0} = \frac{a}{b} \text{ as } t \to \infty \qquad \text{Y} \qquad P(t) \to 0 \text{ as } t \to -\infty.$$

La línea de puntos $P = a/2b$ de la figura 3.10 corresponde a la ordenada de un punto de inflexión de la curva logística. Para caracterizarlo diferenciamos la ecuación (4) aplicando la regla del producto:

$$\begin{aligned}\frac{d^2P}{dt^2} = P\left(-b\frac{dP}{dt}\right) + (a - bP)\frac{dP}{dt} &= \frac{dP}{dt}(a - 2bP) \\ &= P(a - bP)(a \quad 2bP) \\ &= 2b^2P\left(P - \frac{a}{b}\right)\left(P - \frac{a}{2b}\right).\end{aligned}$$

Recuérdese, del cálculo diferencial, que los puntos en donde $d^2P/dt^2 = 0$ son posibles puntos de inflexión, pero se pueden excluir $P = 0$ y $P = a/b$; de aquí que $P = a/2b$ sea el único valor posible para la ordenada a la cual puede cambiar la concavidad de la gráfica. Entonces, P" = 0 cuando $0 < P < a/2b$, y $a/2b < P < a/b$ significa que $P'' < 0$; por consiguiente, al avanzar de izquierda a derecha la gráfica cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo, en el punto que corresponde a $P = a/2b$. Cuando el valor inicial satisface a $0 < P_0 < a/2b$, la gráfica de $P(t)$ toma la forma de una S [Fig. 3. loa)]. Cuando $a/2b < P_0 < a/b$, la gráfica sigue teniendo la forma de S, pero el punto de inflexión está en un valor negativo de t [Fig. 3. 10b)].

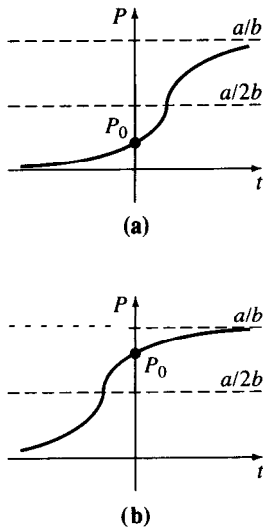


FIGURA 3.10

Ya vimos la ecuación (4) en la ecuación (9) de la sección **1.3,** donde tenía la forma $dx/dt = kx(n + 1 - x)$, $k > 0$. Esta ecuación diferencial es un modelo razonable para describir la difusión de una epidemia que comienza cuando un individuo infectado se introduce en una población estática. La solución $x(t)$ representa la cantidad de sujetos que contraen la enfermedad en cualquier momento.

EJEMPLO 1 **Crecimiento logístico**

Suponga que un alumno es portador del virus de la gripe y regresa a su escuela, donde hay 1000 estudiantes. Si se supone que la razón con que se propaga el virus es proporcional no sólo a la cantidad x de alumnos infectados, sino también a la cantidad de alumnos no infectados, determine la cantidad de alumnos infectados seis días después, si se observa que a los cuatro días $x(4) = 50$.

SOLUCIÓN Suponiendo que nadie sale del campus durante la epidemia, debemos resolver el problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = kx(1000 - x), \qquad x(0) = 1.$$

Sustituimos $a = 1\,000k$ y $b = k$ en la ecuación (5) y vemos de inmediato que

$$x(t) = \frac{1000k}{k + 999ke^{-1000kt}} = \frac{1000}{1 + 999e^{-1000kt}}.$$

Usamos la condición $x(4) = 50$ y calculamos k con

$$50 = \frac{1000}{1 + 999e^{-4000k}}.$$

Esto da como resultado $-1\,000k = \frac{1}{4} \ln \frac{19}{999} = -0.9906$. Entonces

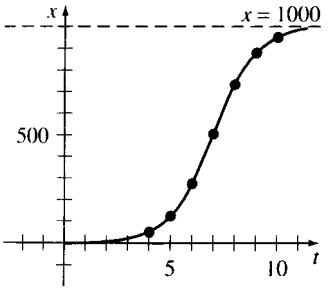
$$x(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0.9906t}}.$$

La respuesta es $$x(6) = \frac{1000}{1 + 999e^{-5.9436}} = 276 \text{ alumnos}$$

En la tabla de la figura 3. ll b) hay otros valores calculados de $x(t)$. ■

Curvas de Gompertz Otra ecuación que tiene la forma de la ecuación (2) es una modificación de la ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = P(a - b \ln P), \tag{6}$$



(a)

t (days)	x (number infected)
4	50 (observed)
5	124
6	276
7	507
8	735
9	882
10	953

(b)

FIGURA 3.11

en donde a y b son constantes. Por separación de variables se comprueba con facilidad (consúltese el problema 5 en los ejercicios 3.2) que una solución de la ecuación (6) es

$$P(t) = e^{a/b}e^{-ce^{-bt}}, \tag{7}$$

en donde c es una constante arbitraria. Cuando $b > 0$, $P \to e^{a/b}$ cuando $t \to \infty$, mientras que cuando $b < 0$ y $c > 0$, $P \to 0$ cuando $t \to \infty$. La gráfica de la función (7) se llama **curva de Gompertz** y se parece mucho a la gráfica de la función logística. La figura 3.12 muestra dos formas de la gráfica de $P(t)$.

Las funciones como la ecuación (7) surgen, por ejemplo, al describir el aumento o la disminución de ciertas poblaciones, en el crecimiento de tumores, en predicciones actuariales y en el incremento de las utilidades por la venta de un producto comercial.

Reacciones químicas Supongamos que se combinan a gramos de la sustancia A con b gramos de la sustancia B. Si, para formar $X(t)$ gramos de la sustancia C se necesitan Mpartes de A y N partes de B, los gramos de las sustancias A y B que quedan en cualquier momento son, respectivamente,

$$a - \frac{M}{M+N}X \qquad \text{y} \qquad b - \frac{N}{M+N}X.$$

Según la ley de acción de masas, la rapidez de reacción se apega a

$$\frac{dX}{dt} \propto \left(a - \frac{M}{M+N}X\right)\left(b - \frac{N}{M+N}X\right). \tag{8}$$

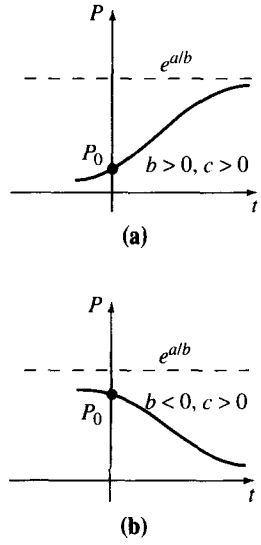


FIGURA 3.12

Sacamos a $M/(M + N)$ como factor común del primer factor, a $N/(M + N)$ del segundo e introducimos una constante de proporcionalidad, $k > 0$, con lo cual la ecuación (8) adquiere la forma

$$\frac{dX}{dt} = k(\alpha - X)(\beta - X), \tag{9}$$

en que $\alpha = a(M + N)/M$ y $\beta = b(M + N)/N$. De acuerdo con la ecuación (7) de la sección 1.3, una reacción química que responde a la ecuación diferencial no lineal (9) se llama **reacción de segundo orden.**

EJEMPLO 2 **Reacción química de segundo orden**

Cuando se combinan dos sustancias, A y B, se forma un compuesto C. La reacción entre ambas es tal que, por cada gramo de A se usan 4 gramos de B. Se observa que a los 10 minutos se han formado 30 gramos del producto C. Calcule la cantidad de C en función del tiempo si la velocidad de la reacción es proporcional a las cantidades de A y B que quedan y al principio hay 50 gramos de A y 32 gramos de B. ¿Qué cantidad de compuesto C hay a los 15 minutos? Interprete la solución cuando $t \to \infty$.

SOLUCIÓN Sean $X(t)$ los gramos del compuesto C presentes cuando el tiempo es t. Está claro que $X(0) = 0$ y $X(10) = 30$ g.

Si, por ejemplo, hay 2 gramos del producto C, hemos debido usar, digamos, a gramos de A y b gramos de B, de tal modo que $a + b = 2$ y $b = 4a$; por consiguiente, debemos emplear $a = \frac{2}{5} = 2(\frac{1}{5})$ g de la sustancia A y $b = \frac{8}{5} = 2(\frac{4}{5})$ de B. En general, para obtener Xgramos de C debemos emplear

$$\frac{X}{5} \text{ g de } A \qquad y \qquad \frac{4}{5}X \text{ g de } B.$$

Entonces, las cantidades de A y B que quedan en cualquier momento son

$$50 - \frac{X}{5} \qquad \text{y} \qquad 32 - \frac{4}{5}X,$$

respectivamente.

Sabemos que la rapidez de formación del compuesto C está definida por

$$\frac{dX}{dt} \propto \left(50 - \frac{X}{5}\right)\left(32 - \frac{4}{5}X\right).$$

Para simplificar las operaciones algebraicas, sacaremos a $\frac{1}{5}$ como factor común del primer término, $\frac{4}{5}$ del segundo e introduciremos la constante de proporcionalidad:

$$\frac{dX}{dt} = \text{k}(250 - X)(40 - \text{X}).$$

Separamos variables y por fracciones parciales llegamos a

$$-\frac{1/210}{250 - X}dX + \frac{1/210}{40 - X}dX = kdt.$$

Al integrarla obtenemos

$$\ln\left|\frac{250 - X}{40 - X}\right| = 210kt + c_1 \quad \text{0 sea} \quad \frac{250 - X}{40 - X} = c_2 e^{210kt}. \tag{10}$$

Cuando $t = 0$, $X = 0$, y en consecuencia $c_2 = \frac{25}{4}$. Cuando $X = 30$ g cuando $t = 10$, vemos que $21\,\text{Ok} = \frac{1}{10}\ln\frac{88}{25} = 0.1258$. Con estos datos despejamos X de la última de las ecuaciones (10):

$$X(t) = 1000\,\frac{1 - e^{-0.1258t}}{25 - 4e^{-0.1258t}}. \tag{11}$$

En la figura 3.13 se muestra el comportamiento de X en función del tiempo. Según la tabla de esa figura y la ecuación (1 1), está claro que $X \to 40$ cuando $t \to \infty$. Esto quiere decir que se forman 40 gramos de la sustancia C y que quedan

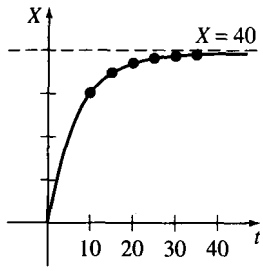
$$50 - \frac{1}{5}(40) = 42\ \text{g de}\ A \qquad \text{y} \qquad 32 - \frac{4}{5}(40) = 0\ \text{g de}\ B. \quad \blacksquare$$

Nota

No obstante contar con la integral 20 en la Tabla de integrales al final del libro, podría ser más útil la forma alternativa, en función de la tangente hiperbólica inversa

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{u}{a} + c,$$

al resolver algunos de los problemas en los ejercicios 3.2.



(a)

t (min)	x (g)
10	30 (medido)
15	34.78
20	37.25
25	38.54
30	39.22
35	39.59

(b)

FIGURA 3.13

EJERCICIOS 3.2

1. La cantidad C(r) de supermercados que emplean cajas computarizadas en un país esta definida por el problema de valor inicial

$$\frac{dC}{dt} = C(1 - 0.0005C), \qquad C(0) = 1,$$

en donde $t > 0$. ¿Cuántos supermercados utilizan el método computarizado cuando $t = 10$? ¿Cuántos lo adoptaran después de un tiempo muy largo?

2. La cantidad N(t) de personas en una comunidad bajo la influencia de determinado anuncio se apega a la ecuación logística. Al principio, $N(0) = 500$ y se observa que $N(1) = 1000$. Se pronostica que habrá un límite de 50 000 individuos que verán el anuncio. Determine $N(t)$.

3. El modelo demográfico P(t) de un suburbio en una gran ciudad esta descrito por el problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = P(10^{-1} - 10^{-7}P), \qquad P(0) = 5000,$$

en donde t se expresa en meses. ¿Cuál es el valor límite de la población? ¿Cuándo igualara la población la mitad de ese valor límite?

4. Determine una solución de la **ecuación logística modificada**

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP)(1 - cP^{-1}), \quad a, b, c > 0.$$

5. **a)** Resuelva la ecuación (6):

$$\frac{dP}{dt} = P(a - b \ln P).$$

b) Determine el valor de c en la ecuación (7), si $P(O) = P_0$.

6. Suponga que $0 < P_0 < e^{a/b}$, y que $a > 0$. Use la ecuación (6) para determinar la ordenada del punto de inflexión de una curva de Gompertz.
7. Dos sustancias, *A* y *B*, se combinan para formar la sustancia C. La rapidez de reacción es proporcional al producto de las cantidades instantáneas de *A* y *B* que no se han convertido en C. Al principio hay 40 gramos de *A* y 50 gramos de *B*, y por cada gramo de *B se* consumen 2 de *A*. Se observa que a los cinco minutos se han formado 10 gramos de C. ¿Cuánto de C se forma en 20 minutos? Cual es la cantidad límite de C al cabo de mucho tiempo? ¿Cuánto de las sustancias *A* y *B* queda después de mucho tiempo?
8. Resuelva el problema 7 si hay al principio 1 OO gramos del reactivo *A*. ¿Cuándo se formará la mitad de la cantidad límite de C?
9. Obtenga una solución de la ecuación

$$\frac{dX}{dt} = k(\alpha - X)(\beta - X)$$

que describe las reacciones de segundo orden. Describa los casos $\alpha \neq \beta$ y $\alpha = \beta$.

10. En una reacción química de tercer orden, los gramos X de un compuesto que se forma cuando se combinan tres sustancias se apegan a

$$\frac{dX}{dt} = k(\alpha - X)(\beta - X)(\gamma - X).$$

Resuelva la ecuación suponiendo que $\alpha \neq \beta \neq \gamma$.

ll. La profundidad h del agua al vaciarse un tanque cilíndrico vertical por un agujero en su fondo está descrita por

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_o}{A_w}\sqrt{2gh}, \qquad g = 32 \text{ ft/s}^2,$$

en donde A_w y A_0 son las áreas transversales del tanque y del agujero, respectivamente [Ec. (14), Sec. 1.31. Resuelva la ecuación con una profundidad inicial del agua de 20 ft, $A_w = 50$ ft^2 y $A_0 = \frac{1}{2}$ ft^2. ¿En qué momento queda vacío el tanque?

12. ¿Cuánto tarda en vaciarse el tanque del problema ll si el factor por fricción y contracción en el agujero es c = 0.6? (Vea el problema 7 de los ejercicios 1.3.)
13. Resuelva la ecuación diferencial de la **tractriz**

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{s^2 - y^2}}$$

(vea el problema 13, en los ejercicios .13). Suponga que el punto inicial en el eje y es (0, 10) y que la longitud de la cuerda es s = 10 pies.

14. **Según** la ley **de Stefan** de la radiación, la rapidez de cambio de la temperatura de un objeto cuya temperatura absoluta es T, es

$$\frac{dT}{dt} = k(T^4 - T_m^4),$$

en donde T_m es la temperatura absoluta del medio que lo rodea. Determine una solución de esta ecuación diferencial. Se puede demostrar que, cuando $T - T_m$ es pequeña en comparación con T_m, esta ecuación se **apega** mucho a la ley de Newton del enfriamiento [Ec. (10), Sec. 1.3].

15. Una ecuación diferencial que describe la velocidad v de una masa m que cae cuando la resistencia que le opone el aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea, es

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2,$$

en que k es una constante de proporcionalidad positiva.

a) Resuelva esta ecuación sujeta a la condición inicial v(O) = v_0.

b) Determine la velocidad límite, o terminal, de la masa.

c) Si la distancia s se relaciona con la velocidad de caída mediante ds/dt = v, deduzca una ecuación explícita de s, sabiendo que $s(0) = s_0$.

16. **a)** Deduzca una ecuación diferencial para describir la velocidad $v(t)$ de una masa m que se sumerge en agua, cuando la resistencia del agua es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea **y,** al mismo tiempo, el agua ejerce una fuerza de flotación hacia arriba, cuya magnitud la define el principio de Arquímedes. Suponga que la dirección positiva es hacia abajo.

b) Resuelva la ecuación diferencial que obtuvo en la parte a).

c) Calcule la velocidad límite, o terminal, de la masa que se hunde.

17. **a)** Si se sacan o "cosechan" h animales por unidad de tiempo (h constante), el modelo demográfico P(t) de los animales en cualquier momento t es

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP) - h, \qquad P(0) = P_0,$$

en donde a, b, h y P_0 son constantes positivas. Resuelva el problema cuando $a = 5$, $b = 1$ y $h = 4$.

b) Use un programa para determinar el comportamiento a largo plazo de la población en la parte a), cuando $P_0 > 4$, $1 < P_0 < 4$ y $0 < P_0 < 1$.

c) Si la población se extingue en un tiempo finito, determine ese tiempo.

18. a) Use los datos censales de 1790, 1850 y 1910, para Estados Unidos (tabla anexa al problema 33, ejercicios 3.1) y forme un modelo demográfico del tipo

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP), \qquad P(0) = P_0.$$

b) Forme una tabla para comparar la población predicha por el modelo en la parte a) con la población según el ceso. Calcule el error y el porcentaje de error con ca& par de datos.

19. Determine las trayectorias ortogonales de la familia $y = 1/(x + c_1)$ (problema 32, ejercicios 3.1). Use una graficadora para trazar ambas familias en el mismo conjunto de ejes coordenados.

20. Si se supone que una bola de nieve se funde de tal modo que su forma siempre es esférica, un modelo matemático de su volumen es

$$\frac{dV}{dt} = kS,$$

en donde S es el área superficial de una esfera de radio r, y $k < 0$ es una constante de proporcionalidad (problema 19, ejercicios 1.3).

a) Replantee la ecuación diferencial en términos de V(t).

b) Resuelva la ecuación en la parte a), sujeta a la condición inicial $V(0) = V_0$.

c) Si r(O) = r_0, determine el radio de la bola de nieve en función del tiempo t. ¿Cuándo desaparece la bola de nieve?

21. La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$$

describe la forma de una curva plana, C, que refleja todos los rayos de luz que le llegan y los concentra en el mismo punto (problema 17, ejercicios 1.3). Hay varias formas de resolver esta ecuación.

a) Primero, compruebe que la ecuación diferencial sea homogénea (Sec. 2.4). Demuestre que la sustitución $y = ux$ da como resultado

$$\frac{u\,du}{\sqrt{1 + u^2}\,(1 - \sqrt{1 + u^2})} = \frac{dx}{x}.$$

Use un sistema algebraico de computación (SAC) o alguna sustitución adecuada para integrar el lado izquierdo de la ecuación. Demuestre que la curva C debe ser una parábola con foco en el origen, simétrica con respecto al eje x.

b) A continuación demuestre que la primera ecuación diferencial se puede escribir en la forma alternativa $y = 2xy' + y(y')^2$. Sea $w = y^2$ y aplique el resultado del problema 54, ejercicios 1.1, para resolver la ecuación diferencial resultante. Explique cualquier diferencia que exista entre esta respuesta y la que obtuvo en la parte a).

c) Por último, demuestre que la primera ecuación diferencial también se puede resolver con la sustitución $u = x^2 + y^2$.

22. Un modelo sencillo de la forma de un tsunami o maremoto es

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 = 2W^2 - W^3,$$

en donde $W(x)$ es la altura de la ola en función de su posición relativa a un punto determinado en alta mar.

a) Por inspección, determine todas las soluciones constantes de la ecuación diferencial.

b) Use un sistema algebraico de computación para determinar una solución no constante de la ecuación diferencial.

c) Con una graficadora, trace todas las soluciones que satisfagan la siguiente condición inicial: $W(0) = 2$.

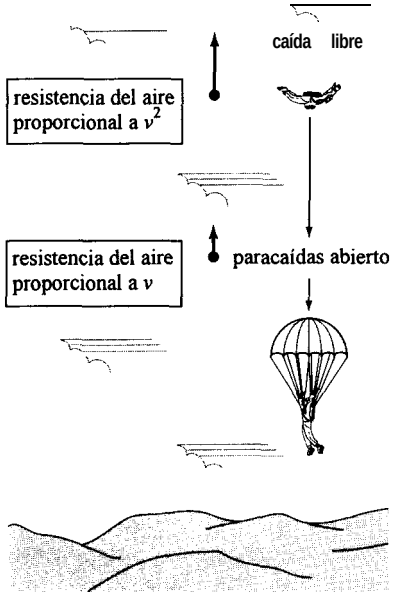


FIGURA 3.14

Problema *para* discusión

23. Un paracaidista que pesa 160 lb, se arroja de un avión que vuela a 12 000 ft de altura. Después de caer libremente durante 15 s, abre su paracaídas. Suponga que la resistencia del aire es proporcional a v^2 cuando no se abre el paracaídas y a la velocidad v después de abrirlo (Fig. 3.14). Para una persona con este peso, los valores normales de la constante k en los modelos del problema 27, ejercicios 3.1, y el problema 15 anterior, son $k = 7.857$ y $k = 0.0053$, respectivamente. Calcule el tiempo que tarda el paracaidista en llegar al suelo. ¿Cuál es su velocidad de impacto con el suelo?

3.3 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y NO LINEALES

■ *Sistema de ecuaciones diferenciales como modelo matemático* ■ *Sistemas lineales y no lineales* ■ *Desintegración radiactiva* ■ *Mezclas* ■ *Modelo de Lotka-Volterra depredador-presa* ■ *Modelos de competencia* ■ *Redes eléctricas*

Hasta ahora, todos los modelos matemáticos descritos han sido ecuaciones diferenciales únicas. Una sola ecuación diferencial puede describir una población en un ambiente; pero si hay, por ejemplo, dos especies que interactúan y compiten en el mismo ambiente (por ejemplo, conejos y zorros), el modelo demográfico de sus poblaciones $x(t)$ y $y(t)$ podría ser un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, como

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= g_1(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g_2(t, x, y) \end{aligned} \tag{1}$$

Cuando g_1 y g_2 son lineales en las variables x y y —esto es, $g_1(x, y) = c_1x + c_2y + f_1(t)$, y $g_2(x, y) = c_3x + c_4y + f_2(t)$—, se dice que el sistema (1) **es un sistema lineal.** Un sistema de ecuaciones diferenciales que no es lineal se denomina no **lineal.**

En esta sección describiremos unos modelos matemáticos partiendo de algunos de los temas expuestos en las dos secciones anteriores. Esta sección se parece a la 1.3 porque abordaremos algunos modelos matemáticos que son sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, sin desarrollar método alguno para resolverlos. Hay motivos para no resolver ahora esos sistemas: en primer lugar, todavía no conocemos las herramientas matemáticas necesarias y, en segundo, algunos de los sistemas que describiremos simplemente no se pueden resolver.

En el capítulo 8 examinaremos los métodos de solución para sistemas de ecuaciones lineales de primer orden, y en los capítulos 4 y 7, para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior.

Series radiactivas Para describir la desintegración radiactiva en las secciones 1.3 y 3.1, supusimos que la razón de desintegración es proporcional al numero $A(t)$ de núcleos de la sustancia presentes en el momento t. Cuando una sustancia se desintegra radiactivamente, por lo general no sólo se transmuta en una sustancia estable (con lo que se detiene el proceso), sino que la primera sustancia se desintegra, forma otra sustancia radiactiva y ésta, a su vez, decae y forma una tercera sustancia, etc. Este proceso se llama **serie de desintegración radiactiva** (o serie radiactiva) y continúa hasta llegar a un elemento estable. Por ejemplo, la serie del uranio es U-238 $\rightarrow$ Th-234 $\rightarrow$ . . $\rightarrow$ Pb-206, donde este último es un isótopo estable del plomo. Los periodos medios de vida de los diversos elementos en una serie radiactiva pueden ser de miles de millones de años (4.5×10^9 años para el U-238) hasta una fracción de segundo. Supongamos que una serie radiactiva se esquematiza con $X \xrightarrow{-\lambda_1} Y \xrightarrow{-\lambda_2} Z$, y que $k_1 = -\lambda_1 < 0$ y $k_2 = -\lambda_2 < 0$ son las constantes de desintegración de los elementos Xy Y, respectivamente, y que Z es un elemento estable. Supongamos también que x(t), $y(t)$ y z(t) representan las cantidades de los elementos X, Y y Z, respectivamente, que quedan en cualquier momento. La desintegración del elemento X está definida por

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1 x,$$

mientras que la razón con que desintegra el segundo elemento, Y, es la razón neta

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_1 x - \lambda_2 y$$

porque *gana* átomos cuando desintegra X, y al mismo tiempo *pierde* átomos por su propia desintegración. Como Z es un elemento estable, sólo está ganando átomos por el desintegramiento del elemento Y:

$$\frac{dz}{dt} = \lambda_2 y.$$

En otras palabas, un modelo de la serie radiactiva de tres elementos es el sistema de tres ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1 x$$

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_1 x - \lambda_2 y \tag{2}$$
$$\frac{dz}{dt} = \lambda_2 y.$$

Mezclas Examinemos los dos tanques de la figura 3.15. Para fines de nuestra descripción, supongamos que el tanque A contiene 50 galones de agua en que se disolvieron 25 libras de sal. Consideremos que el tanque B contiene 50 galones de agua pura. El líquido es bombeado dentro y fuera de los tanques, como se ve en la figura; la mezcla se intercambia entre ambos y se supone que el líquido que sale de B ha recibido una buena agitación. Deseamos formar un modelo matemático que describa los números $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de libras de sal en los tanques A y B, respectivamente, en el momento t.

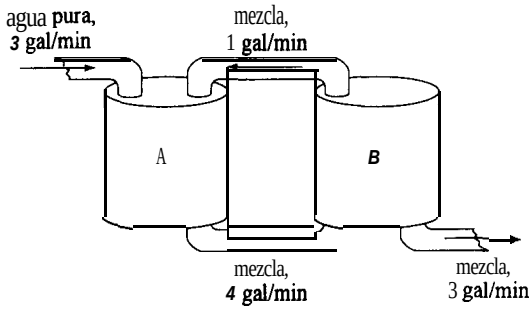


FIGURA 3.15

Mediante un análisis parecido al de la página 24 en la sección 1.3 y en el ejemplo 5 de la sección 3.1, para el tanque A, la tasa neta de cambio de $x_1(t)$ es

$$\frac{dx_1}{dt} = \overbrace{(3 \text{ gal/min}) \cdot (0 \text{ lb/gal})}^{\text{tasa de entrada de la sal}} + (1 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{x_2}{50} \text{ lb/gal}\right) - \overbrace{(4 \text{ gal/min}) \cdot \left(\frac{x_1}{50} \text{ lb/gal}\right)}^{\text{tasa de salida de la sal}}$$
$$= -\frac{2}{25} x_1 + \frac{1}{50} x_2.$$

De igual forma, para el tanque B, la tasa neta de cambio de $x_2(t)$ es

$$\frac{dx_2}{dt} = 4 \cdot \frac{x_1}{50} - 3 \cdot \frac{x_2}{50} - 1 \cdot \frac{x_2}{50}$$
$$= \frac{2}{25} x_1 - \frac{2}{25} x_2.$$

Así llegamos al sistema lineal

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{2}{25} x_1 + \frac{1}{50} x_2 \tag{3}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{2}{25}x_1 - \frac{2}{25}x_2.$$

Observamos que el sistema anterior tiene las condiciones iniciales $x_1(0) = 25$, $x_2(0) = 0$.

Modelo depredador-presa Supongamos que dos especies animales interactúan en el mismo ambiente o ecosistema; la primera sólo come plantas y la segunda se alimenta de la primera. En otras palabras, una especie es depredador y la otra es la presa; por ejemplo, los lobos cazan a los caribús que se alimentan de pasto, los tiburones devoran a los peces pequeños y el búho de las nieves persigue a un roedor ártico llamado *lemming*. Para fines de nuestra descripción, imaginemos que los depredadores son zorros y las presas, conejos.

Sean $x(t)$ y $y(t)$ las poblaciones de zorros y conejos en cualquier momento t. Si no hubiera conejos, cabría esperar que los zorros disminuyeran en numero siguiendo la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = -ax, \quad a > 0. \tag{4}$$

Al carecer del suministro alimenticio adecuado. Por otro lado, cuando hay conejos en el ecosistema parece lógico imaginar que la cantidad de encuentros o interacciones por unidad de tiempo entre ambas especies, es proporcional simultáneamente a sus poblaciones, x y y; o sea, es proporcional al producto xy. Así, cuando hay conejos, hay alimento para los zorros y éstos aumentan en el ecosistema a una tasa $bxy > 0$. Al sumar esta tasa a la ecuación (4) se obtiene un modelo demográfico para estos depredadores:

$$\frac{dx}{dt} = -ax + bxy. \tag{5}$$

Por otro lado, cuando no hay zorros y si se supone además que las reservas de alimento son ilimitadas, los conejos aumentarían con una rapidez proporcional al número de especímenes existentes en el momento t:

$$\frac{dy}{dt} = dy, \quad d > 0. \tag{6}$$

Pero cuando hay zorros, el modelo demográfico para los conejos es la ecuación (6) menos cxy, $c > 0$; esto es, disminuye según la rapidez con que son comidos:

$$\frac{dy}{dt} = dy - cxy. \tag{7}$$

Las ecuaciones (5) y (7) forman un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ax + bxy = x(-a + by) \\ \frac{dy}{dt} &= dy - cxy = y(d - cx), \end{aligned} \tag{8}$$

en donde a, b, c y d son constantes positivas. Éste es un sistema famoso de ecuaciones y se llama **modelo depredador-presa de Lotka-Volterra**.

A excepción de las dos soluciones constantes x(t) = 0, $y(t) = 0$, y x(t) $= d/c$, $y(t) = a/b$, el sistema no lineal (8) no se puede resolver en términos de funciones elementales; sin embargo, podemos analizar en forma cuantitativa y cualitativa esos sistemas. Véase el capítulo 9, Métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

EJEMPLO 1 **Modelo depredador-presa**

Supongamos que

$$\frac{dx}{dt} = -0.16x + 0.08xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 4.5y - 0.9xy$$

representa un modelo depredador-presa. Como estamos manejando poblaciones, $x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$. La figura 3.16 se obtuvo con ayuda de un programa, y muestra las curvas características de las demografías de depredadores y presas para este modelo, sobrepuestas en los mismos ejes coordenados. Las condiciones iniciales empleadas fueron $x(0) = 4$, $y(0) = 4$. La curva en negro representa la población x(t) del depredador (zorros) y la curva en color a la $y(t)$ de la presa (conejos). Obsérvese que el modelo parece predecir que ambas poblaciones, x(t) y y(r), son periódicas. Esto tiene sentido intuitivamente, porque cuando disminuye la cantidad de presas, la cantidad de depredadores terminará reduciéndose por el menor suministro alimenticio; pero a causa de un decremento en la cantidad de depredadores, aumenta la cantidad de presas; esto, a su vez, origina un mayor número de depredadores, que más adelante originan otra disminución en la cantidad de presas. ■

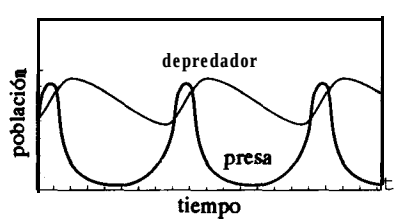


FIGURA 3.16

Modelos de competencia Ahora consideremos que hay dos especies animales distintas que ocupan el mismo ecosistema, no como depredador y presa, sino como competidores en el uso de los mismos recursos, como alimentos o espacio vital. Cuando falta una especie, supongamos que la razón de crecimiento demográfico de cada especie es

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad \textbf{Y} \quad \frac{dy}{dt} = cy, \tag{9}$$

respectivamente.

En vista de que las dos especies compiten, otra hipótesis podría ser que cada una se ve menguada por la influencia (o existencia) de la otra población. Así, un modelo de las dos poblaciones es el sistema lineal

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - by\\ \frac{dy}{dt} &= cy - dx,\end{aligned} \tag{10}$$

en que a, b, c y d son constantes positivas.

Por otra parte, podríamos suponer, como lo hicimos en la ecuación (5), que cada rapidez de crecimiento en las ecuaciones (9) debe disminuir a una tasa proporcional a la cantidad de interacciones entre las dos especies:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy\\ \frac{dy}{dt} &= cy - dxy.\end{aligned} \tag{11}$$

Vemos por inspección que este sistema no lineal se parece al modelo depredador-presa de Lotka-Volterra. Sería más real reemplazar las tasas en las ecuaciones (9) -que indican que la población de cada especie aislada crece en forma exponencial- con tasas que reflejen que cada población crece en forma logística (esto es, que la población permanece acotada):

$$\frac{dx}{dt} = a_1x - b_1x^2 \qquad \text{Y} \qquad \frac{dy}{dt} = a_2y - b_2y^2. \tag{12}$$

Si a esas nuevas tasas se les restan razones proporcionales a la cantidad de interacciones, llegamos a otro modelo no lineal

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_1x - b_1x^2 - c_1xy = x(a_1 - b_1x - c_1y)\\ \frac{dy}{dt} &= a_2y - b_2y^2 - c_2xy = y(a_2 - b_2y - c_2x),\end{aligned} \tag{13}$$

en que todos los coeficientes son positivos. El sistema lineal (10) y los sistemas no lineales (ll) y (13) se llaman **modelos de competencia.**

Redes Una red eléctrica con más de un ciclo también origina ecuaciones diferenciales simultáneas. Como vemos en la figura 3.17, la corriente $i_1(t)$ se divide en las direcciones indicadas en el punto B_1, que se llama ***nodo*** de la red. Según la primera ley de Kirchhoff podemos escribir

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) \tag{14}$$

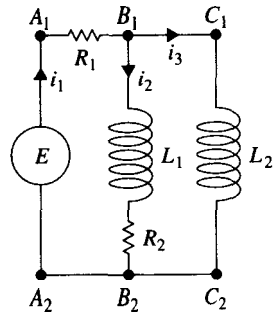


FIGURA 3.17

Además, podemos aplicar también la **segunda ley de Kirchhoff** a cada circuito. Para el circuito $A_1B_1B_2A_2A_1$, sumamos las caídas de voltaje a través de cada uno de sus elementos y llegamos a

$$E(t) = i_1R_1 + L_1\frac{di_2}{dt} + i_2R_2. \tag{15}$$

De igual manera, para el circuito $A_1B_1C_1C_2B_2A_2A_1$, vemos que

$$E(t) = i_1R_1 + L_2\frac{di_3}{dt}. \tag{16}$$

Usamos la ecuación (14) a fin de eliminar i_1 de la (15) y (16), y obtenemos dos ecuaciones lineales de primer orden para las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$:

$$\begin{aligned} L_1\frac{di_2}{dt} + (R_1 + R_2)i_2 + R_1i_3 &= E(t) \\ L_2\frac{di_3}{dt} + R_1i_2 + R_1i_3 &= E(t). \end{aligned} \tag{17}$$

Dejamos como ejercicio (problema 14) demostrar que el sistema de ecuaciones diferenciales que describe las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ de la red con un resistor, un inductor y un **capacitor** (Fig. 3.18) es

$$\begin{aligned} L\frac{di_1}{dt} + Ri_2 &= E(t) \\ RC\frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

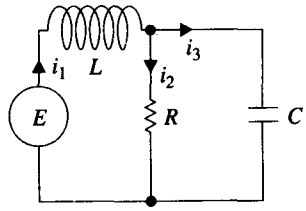


FIGURA 3.18

EJERCICIOS 3.3

1. No hemos descrito método alguno para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden; sin embargo, los sistemas como el (2) se pueden resolver con sólo saber resolver una sola ecuación lineal de primer orden. Determine una solución del sistema (2), sujeta a las condiciones iniciales x(O) = x_0, $y(0)$ = 0 y z(O) = 0.
2. En el problema 1 suponga que el tiempo se mide en días, que las constantes de desintegración son k_1 = -0.138629 y k_2 = -0.00495 1, y también que x_0 = 20. Con una graticadora, trace las curvas de las soluciones x(t), y(t) y z(t) en el mismo conjunto de coordenadas. Con las gráficas estime los periodos medios de los elementos Xy Y.
3. Use las gráficas del problema 2 para aproximar los tiempos en que son iguales las cantidades $x(t)$ y y(t), $x(t)$ y $z(t)$ y(t), y z(t). ¿Por qué se puede aceptar intuitivamente el tiempo determinado por igualación de $y(t)$ y $z(t)$?
4. Establezca un modelo matemático de una serie radiactiva de cuatro elementos, W, X, Y y Z, donde Z es un elemento estable.
5. Se tienen dos tanques, A y B, a los que entra y sale líquido con los mismos flujos, de acuerdo con lo que describe el sistema de ecuaciones (3). ¿Cuál sería el sistema de ecuaciones diferenciales si, en lugar de agua pura, entrara al tanque A una salmuera con 2 lb de sal por galón?
6. Con la información de la figura 3.19 formule un modelo matemático para el mínimo de libras de sal, $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$, en cualquier momento en los tanques A, B y C, respectivamente.

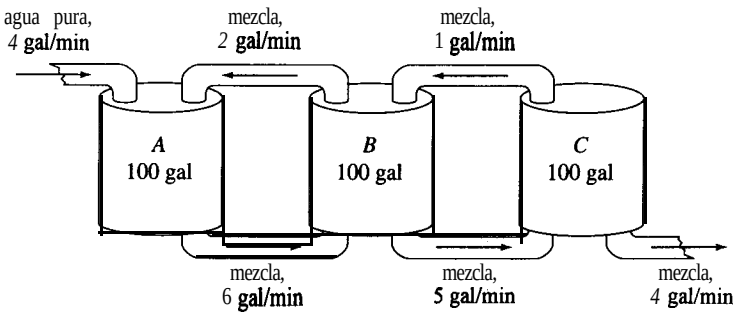


FIGURA 3.19

7. Hay dos tanques A y B, y al principio hay 100 gal de salmuera en cada uno. El tanque A contiene 100 lb de sal disueltas y el B, 50 lb. El sistema es cerrado, porque los líquidos bien agitados sólo pasan de un tanque a otro como vemos en la figura 3.20. Use la información de la figura para formar un modelo matemático de las libras de sal $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en cualquier momento t en los tanques A y B, respectivamente.
8. En el problema 7 del sistema de dos tanques, hay una relación entre las variables $x_1(t)$ y $x_2(t)$ válida para cualquier momento ¿Cuál es? Use esta relación como ayuda para hallar la cantidad de sal en el tanque B cuando t = 30 min.

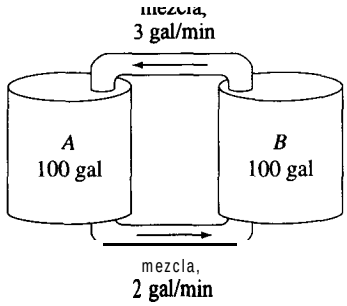


FIGURA 3.20

9. Se tiene un modelo depredador-presa de **Lotka-Volterra** definido por

$$\frac{dx}{dt} = -0.1x + 0.02xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 0.2y - 0.025xy,$$

en que las poblaciones $x(t)$ del depredador, y y(t), de la presa, se expresan en miles. Con un programa, calcule, aproximadamente, el momento $t > 0$ cuando se igualan por primera vez las poblaciones suponiendo x(O) = 6, $y(0) = 6$. Use las gráficas para hallar el periodo aproximado de cada población.

10. Se tiene el modelo de competencia defínido por

$$\frac{dx}{dt} = x(2 - 0.4x - 0.3y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(1 - 0.1y - 0.3x),$$

en que las poblaciones, x(t) y y(r) se expresan en miles y t en anos. Con un *ODE solver*, analice las poblaciones a través de un largo periodo en cada uno de los casos siguientes:

a) x(O) = 1.5, y(O) = 3.5
b) x(O) = 1, $y(0) = 1$
c) $x(0) = 2$, $y(0) = 7$
d) x(O) = 4.5, $y(0) = 0.5$

11. Se tiene el modelo de competencia definido por

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - 0.1x - 0.05y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(1.7 - 0.1y - 0.15x),$$

en que las poblaciones x(t) y y(t) se expresan en miles y t en años. Con un *ODE solver*, analice las poblaciones en un largo periodo en cada uno de los casos siguientes:

a) $x(0) = 1$, y(O)= 1
b) x(O) = 4, y(O) = 10
c) $x(0) = 9$, $y(0) = 4$
d) x(O) = 5.5, $y(0) = 3.5$

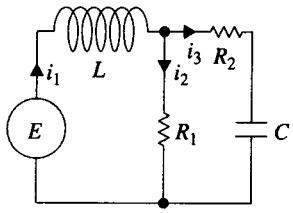


FIGURA 3.21

12. Demuestre que un sistema de ecuaciones diferenciales para describir las corrientes $i_2(t)$ e $i_3(t)$ en la red eléctrica de la figura 3.21 es el siguiente:

$$L\frac{di_2}{dt} + L\frac{di_3}{dt} + R_1 i_2 = E(t)$$
$$-R_1\frac{di_2}{dt} + R_2\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C}i_3 = 0.$$

13. Formule un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que describa las corrientes $i_2(t)$ *e* $i_3(t)$ en la red eléctrica de la figura 3.22.

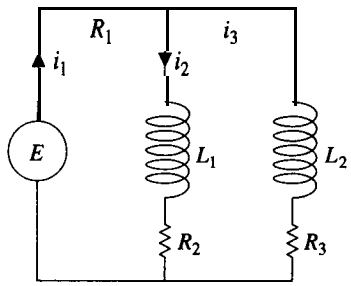


FIGURA 3.22

14. Demuestre que el sistema lineal de las ecuaciones (18) describe las corrientes $i_1(t)$ *e* $i_2(t)$ en la red de la figura 3.18. *[Sugerencia:* $dq/dt = i_3$.*]*

15. Una enfermedad contagiosa se difunde en una comunidad pequeña, con población fija de n personas, por contacto directo entre los individuos infectados y los susceptibles al padecimiento. Suponga que al principio todos son susceptibles y que nadie sale de la comunidad mientras se difunde la epidemia. Cuando el tiempo es t, sean $s(t)$, $i(t)$ y $r(t)$, la cantidad de personas -en miles- ***susceptibles*** pero no infectadas, las ***infectadas*** por la enfermedad y las que se ***recuperaron*** de la enfermedad, respectivamente. Explique por qué el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{ds}{dt} = -k_1 si$$
$$\frac{di}{dt} = -k_2 i + k_1 si$$

$$\frac{dr}{dt} = k_2 i,$$

en que k_1 *(tasa de infección) y* k_2 *(tusa de eliminación o recuperación)* son constantes positivas, es un modelo matemático razonable para describir la difusión de la epidemia en la comunidad. Proponga unas condiciones iniciales plausibles asociadas con este sistema de ecuaciones.

16. a) Explique por qué en el problema 15 basta con analizar

$$\frac{ds}{dt} = -k_1 si$$
$$\frac{di}{dt} = -k_2 i + k_1 si.$$

b) Sean $k_1 = 0.2$, $k_2 = 0.7$ y $n = 10$. Escoja diversos valores de $i(0) = i_0$, $0 < i_0 < 10$. Con un *ODE solver* prediga el modelo acerca de la epidemia en los casos $s_0 > k_2/k_1$ y $s_0 \leq k_2/k_1$. En el caso de una epidemia, determine la cantidad de personas que se contagiaran en último término.

Problemas para *discusión*

17. Suponga que los compartimientos A y B de la figura 3.23 están llenos de fluidos y que están separados por una membrana permeable. Dicha figura muestra el exterior e interior de una célula. También suponga que el nutriente necesario para el crecimiento de la célula pasa a través de la membrana. Un modelo de las concentraciones $x(t)$ y $y(t)$ del nutriente en los compartimientos A y B, respectivamente, en el momento t, es el sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\kappa}{V_A}(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\kappa}{V_B}(x - y),$$

en donde V_A y V_B son los volúmenes de los compartimientos y $k > 0$ es un factor de permeabilidad. Sean $x(0) = x_0$ y $y(0) = y_0$ las concentraciones iniciales del nutriente. Con base sólo en las ecuaciones del sistema y en la hipótesis $x_0 > y_0 > 0$, trace curvas probables

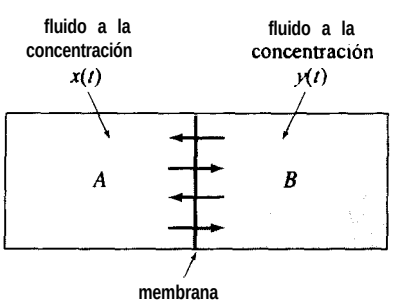


FIGURA 3.23

de solución del sistema en el mismo sistema de ejes coordenados. Explique su razonamiento. Discuta el comportamiento de las soluciones cuando t tiende a infinito

18. El sistema del problema 17, al igual que el de las ecuaciones (2), se puede resolver sin grandes conocimientos. Despeje x(t) y y(t) y compare las gráficas con su conjetura respecto del problema 17. [Sugerencia: reste las dos ecuaciones y haga $z(t)$ =x(t) -y(t).] Determine los valores límite de $x(t)$ y $y(t)$ cuando $t \to \infty$. Explique por qué concuerdan con lo que cabría esperar intuitivamente.
19. Con base en la pura descripción física del problema de mezclas de las páginas 99 y 1 OO y la figura 3.15, describa la naturaleza de las funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$. ¿Cuál es el comportamiento de cada función durante un periodo amplio? Trace las posibles gráficas de $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Compruebe sus conjeturas empleando un programa para obtener las curvas de solución de las ecuaciones (3), sujetas a $x_1(0) = 25$, $x_2(0) = 0$.

Ejercicios de repaso

1. En marzo de 1976, la población mundial llegó a 4000 millones. Una revista predijo que con una tasa de crecimiento anual promedio de 1.8%, la población mundial sería de 8000 millones al cabo de 45 anos. ¿Cómo se compara este valor con el que predice el modelo según el cual la tasa de crecimiento es proporcional a la población en cualquier momento?
2. A un recinto de 8000 ft^3 de volumen entra aire con 0.06% de dióxido de carbono. El flujo de entrada es 2000 ft^3/min y sale con el mismo flujo. Si hay una concentración inicial de 0.2% de dióxido de carbono, determine la concentración en el recinto en cualquier instante posterior. ¿Cuál es la concentración a los 10 min? ¿Cuál es la concentración de estado estable, o de equilibrio, del dióxido de carbono?
3. Un marcapasos cardiaco (Fig. 3.24), está formado por una batería, un capacitor y el corazón, que funciona a modo de resistor. Cuando el conmutador S está en P, el capacitor

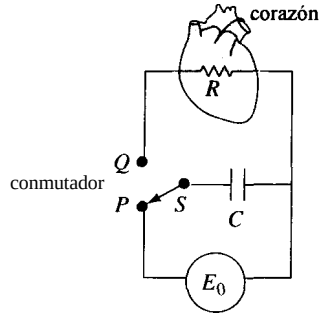


FIGURA 3.24

se carga; cuando está en Q, se descarga y manda un estímulo eléctrico al corazón. En este intervalo, el voltaje E que se aplica al corazón está determinado por

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{RC}E, \quad t_1 < t < t_2,$$

en donde R y C son constantes. Determine E(t), cuando E(t) = 0. (Naturalmente, la abertura y cierre del interruptor son periódicas, para estimular los latidos naturales.)

4. Suponga que una célula está en una solución de concentración constante C_s de un soluto. La célula tiene un volumen constante V y el área de su membrana permeable es la constante A. Según la ley de Fick, la rapidez de cambio de su masa m (la del soluto) es directamente proporcional al área A y a la diferencia C_s – C(t), donde C(t) es la concentración del soluto en el interior de la célula en cualquier momento t. Determine C(t), si $m = VC(t)$ y C(O) = C0 (Fig. 3.25).

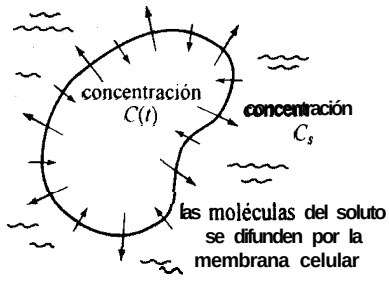


FIGURA 3.25

5. La ley de Newton del enfriamiento es $dT/dt = k(T - T_m)$, $k < 0$; en este caso, la temperatura del medio que rodea a un objeto T_m cambia en el tiempo. Suponga que la temperatura inicial del objeto es T_1 y la del medio, T_2, y suponga que $T_m = T_2 + B(T_1 - T)$, en donde $B > 0$ es una constante.
   a) Determine la temperatura del objeto en cualquier momento t.
   b) ¿Cuál es el valor límite de la temperatura, cuando $t \to \infty$?
   c) ¿Cuál es el valor límite de T_m cuando $t \to \infty$?
6. Un circuito *LR* en serie tiene un inductor variable cuya inductancia es

$$L = \begin{cases} 1 - \dfrac{t}{10}, & 0 \le t < 10 \\ 0, & t \ge 10 \end{cases}$$

Determine la corriente $i(t)$, si la resistencia es 0.2 Ω, el voltaje aplicado es $E(t) = 4$ e $i(0) = 0$. Grafique $i(t)$.

7. Un problema clásico del cálculo de variaciones es determinar la forma de una curva $\mathscr{C}$ tal que una cuenta, por la influencia de la gravedad, se deslice del punto $A(0, 0)$ al punto $B(x_1, y_1)$ en el tiempo mínimo (Fig 3.26). Se puede demostrar que una ecuación diferencial no lineal de la forma $y(x)$ de la trayectoria es $y[1 + (y')^2] = k$, donde k es una constante. Primero despeje dx en función de y y dy, y a continuación sustituya $y = k \operatorname{sen}^2\theta$ para llegar a la forma paramétrica de la solución. La curva $\mathscr{C}$ resulta ser una cicloide.

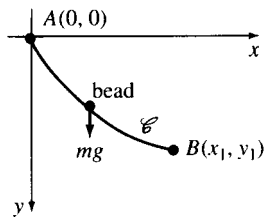


FIGURA 3.26

8. Se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba, al aire, con una velocidad inicial v_0 ft/s. Suponiendo que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea, un par de ecuaciones diferenciales describen al movimiento:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv^2, \quad k > 0,$$

con la dirección de las y positivas hacia arriba, el origen al nivel del piso, para que v = v_0 cuando $y = 0$; la otra ecuación es

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2, \quad k > 0,$$

con el eje de las y positivas hacia abajo, el origen en la altura máxima, para que v = 0 cuando $y = h$. Estas ecuaciones describen al movimiento del proyectil cuando sube y baja, respectivamente. Demuestre que la velocidad de impacto v_i del proyectil es menor que la velocidad inicial v_0. También se puede demostrar que el tiempo t_1 necesario para que el proyectil llegue a su altura máxima h es menor que el tiempo t_2 que tarda en caer desde esa altura (Fig. 3.27).

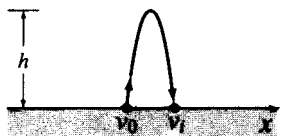


FIGURA 3.27

9. Las poblaciones de dos especies animales se apegan al sistema no lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{dx}{dt} = k_1x(\alpha - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = k_2xy.$$

Determine x y y en función de t.

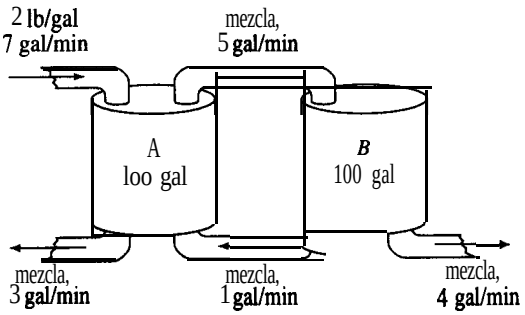


FIGURA 3.28

10. Dos tanques, A y B, contienen 1 OO galones de salmuera cada uno al principio del proceso. El líquido, bien agitado, pasa entre ambos como muestra la figura 3.28. Con la información de la figura, formule un modelo matemático para el número de libras de sal x_1 y x_2, en los tanques A y B, respectivamente, en cualquier momento.

CAPÍTULO

4

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

4.1 Teoría preliminar: ecuaciones lineales
4.1.1 Problemas de valor inicial y de valor en la frontera
4.1.2 Ecuaciones homogéneas
4.1.3 Ecuaciones no homogéneas
4.2 Reducción de orden
4.3 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes
4.4 Coeficientes indeterminados, método de la superposición
4.5 Coeficientes indeterminados, método del anulador
4.6 Variación de parámetros
4.7 Ecuación de Cauchy-Euler
4.8 Sistemas de ecuaciones lineales
4.9 Ecuaciones no lineales
Ejercicios de repaso

INTRODUCCIÓN

Ahora pasaremos a resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden o mayor. En las siete primeras secciones del capítulo examinaremos algo de la teoría y métodos para resolver ciertos tipos de ecuaciones lineales. En la sección 4.8 presentamos el método de eliminación, para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, porque es un método básico, que simplemente desacopla un sistema para llegar a ecuaciones lineales individuales, de orden superior, en cada variable dependiente. El capítulo termina con un breve estudio de ecuaciones no lineales de orden superior.

4.1 TEORÍA PRELIMINAR: ECUACIONES LINEALES

■ *Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior* ■ *Problema de valores iniciales*
■ *Existencia y unicidad* ■ *Problema de valores en la frontera*
■ *Ecuaciones diferenciales homogéneas y no homogéneas* ■ *Operador diferencial lineal*
■ *Dependencia lineal* ■ *Independencia lineal* ■ *Wronskiano* ■ *Conjunto fundamental de soluciones*
■ *Principios de superposición* ■ *Solución general* ■ *Función complementaria* ■ *Solución particular*

4.1.1 Problemas de valor inicial y de valor en la frontera

Problema de valores iniciales En la sección 1.2 definimos qué es un problema de valores iniciales para una ecuación diferencial general de orden n. Para una ecuación diferencial lineal, **un problema de valores iniciales de orden n es**

$$\text{Resolver:} \quad a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$\text{Sujeta a:} \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \ldots, \quad y^{(n-1)}x_0 = y_{n-1}. \tag{1}$$

Recuérdese que, para un problema como éste, se busca una función definida en algún intervalo I que contenga a x_0, y satisfaga la ecuación diferencial y las n condiciones iniciales especificadas en x_0: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Ya vimos que en el caso de un problema de valores iniciales de segundo orden, una curva de solución debe pasar por el punto (x_0, y_0) y tener la pendiente y_1 en ese punto.

Existencia y unicidad En la sección 1.2 enunciamos un teorema que especifica las condiciones para garantizar la existencia y unicidad de una solución de un problema de valores iniciales de primer orden. El teorema siguiente describe las condiciones suficientes de existencia de solución única para el problema representado por las ecuaciones (1).

TEOREMA 4.1 Existencia de una solución única

Sean $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo I, y sea $a_n(x) \neq 0$ para toda x del intervalo. Si $x = x_0$ es cualquier punto en el intervalo, existe una solución en dicho intervalo $y(x)$ del problema de valores iniciales representado por las ecuaciones (1) que es única.

EJEMPLO 1 Solución única de un problema de valores iniciales

El problema de valores iniciales

$$3y''' + 5y'' - y' + 7y = 0, \qquad y(1) = 0,\ y'(1) = 0,\ y''(1) = 0$$

tiene la solución trivial y = 0. Como la ecuación de tercer orden es lineal con coeficientes constantes, se satisfacen todas las condiciones del teorema 4.1; en consecuencia, y = 0 es la única solución en cualquier intervalo que contenga $x = 1$. ■

EJEMPLO 2 Solución única de un problema de valores iniciales

El lector debe comprobar que la función $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ es una solución del problema de valores iniciales

$$y'' - 4y = 12x, \qquad y(0) = 4, \quad y'(0) = 1.$$

La ecuación diferencial es lineal, los coeficientes y g(x) son continuos y $q(x) = 1 \neq 0$ en todo intervalo Z que contenga a $x = 0$. Según el teorema 4.1, debemos concluir que la función dada es la única solución en Z. ■

Ambos requisitos del teorema 4.1: 1) que $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ sean continuos, y 2) que $a_n(x) \neq 0$ para toda x en Z, son importantes. En forma específica, si u,,(x) = 0 para una x en el intervalo, la solución de un problema lineal de valores iniciales quizá no sea única o incluso no exista; por ejemplo, el lector debe comprobar que la función $y = cx^2 + x + 3$ es una solución del problema de valores iniciales

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 6, \qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$$

para x en el intervalo $(-\infty, \infty)$ y cualquier valor del parámetro c. En otras palabras, no hay solución única para el problema. Aunque se satisface la mayor parte de las condiciones del teorema 4.1, las dificultades obvias estriban en que $a_2(x) = x^2$ es cero cuando $x = 0$, y en que las condiciones iniciales se han impuesto en ese valor.

Problema de valor en la frontera Otro tipo de problema es resolver una ecuación diferencial lineal de segundo ordeno mayor en la que la variable dependiente y, o sus derivadas, estén especificadas en ***puntos distintos.*** Un problema como

$$\textit{Resolver:} \quad a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$\textit{Sujeta a:} \quad y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1$$

se llama **problema de valores en la frontera.** Los valores necesarios, y(u) = y_0 y y(b) = y_1, se denominan **condiciones en la frontera.** Una solución del problema anterior es una función que satisface la ecuación diferencial en algún intervalo Z que contiene a a y b, cuya gráfica pasa por los dos puntos (u, y_0) y (b, y_1). Véase la figura 4.1.

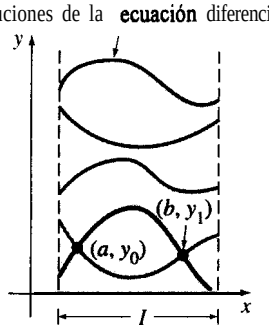


FIGURA 4.1

Para una ecuación diferencial de segundo orden, otros pares de condiciones en la frontera podrían ser

$$y'(a) = y_0,\ y(b) = y_1$$
$$y(a) = \text{yo},\quad \text{y'(b)} = y_1$$
$$y'(a) = \text{YO},\quad y'(b) = y_1,$$

en donde y_0 y y_1 representan constantes arbitrarias. Estos tres pares de condiciones sólo son casos especiales de las condiciones generales en la frontera:

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1$$
$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2.$$

Los ejemplos que siguen demuestran que aun cuando se satisfagan las condiciones del teorema 4.1, un problema de valor en la frontera puede tener i) varias soluciones (Fig. 4.1); ii) solución única, 0 iii) ninguna solución.

EJEMPLO 3 **Un problema de valor en la frontera puede tener muchas soluciones, una 0 ninguna**

En el ejemplo 5 de la sección 1.1 vimos que la familia a dos parámetros de soluciones de la ecuación diferencial x" + $16x$ = 0 es

$$x = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t. \tag{2}$$

a) Supongamos que queremos determinar la solución de la ecuación que además satisfaga las condiciones de frontera x(O) = 0, $x(\pi/2)$ = 0. Obsérvese que la primera condición, $0 = c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0$, implica que $c_1 = 0$, de modo que $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$. Pero cuando $t = \pi/2$, $0 = c_2 \operatorname{sen} 2\pi$ es satisfactoria para cualquier elección de c_2, ya que sen $2\pi = 0$. Entonces, el problema de valores en la frontera

$$x'' + 16x = 0, \qquad x(0) = 0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{3}$$

tiene una cantidad infinita de soluciones. En la figura 4.2 vemos las gráficas de algunos de los miembros de la familia a un parámetro $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$ que pasan por los dos puntos, $(0, 0)$ y $(\pi/2, 0)$.

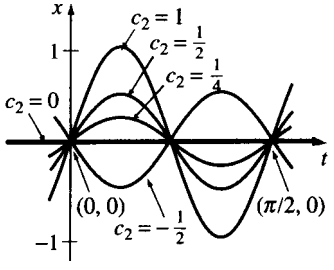


FIGURA 4.2

b) Si se modifica como sigue el problema de valores en la frontera expresado por (3),

$$x'' + 16x = 0, \qquad x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0 \tag{4}$$

x(O) = 0 sigue determinando que $c_1 = 0$ en la solución (2). Pero al aplicar $x(\pi/8) = 0$ a $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$ se requiere que $0 = c_2 \operatorname{sen}(\pi/2) = c_2\ 1$; en consecuencia, $x = 0$ es una solución de este nuevo problema de valor en la frontera. En realidad, se puede demostrar que $x = 0$ es la solución ***única*** del sistema (4).

c) Por último, al transformar el problema en

$$x'' + 16x = 0, \qquad x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \tag{5}$$

vemos, que $c_1 = 0$ porque x(O) = 0 pero, al aplicar $x(\pi/2) = 1$ a $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$, llegamos a la contradicción $1 = c_2 \operatorname{sen} 2\pi = c_2 \cdot 0 = 0$. En consecuencia, el problema de valores en la frontera descrito por (5) no tiene solución. ■

4.1.2 Ecuaciones homogéneas

Una ecuación lineal de orden ***n*** de la forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{6}$$

se llama **homogénea,** mientras que una ecuación

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{7}$$

donde g(x) no es idénticamente cero, se llama **no homogénea;** por ejemplo, $2y'' + 3y' - 5y = 0$ es una ecuación diferencial de segundo orden, lineal y homogénea, mientras que $x^3y''' + 6y' + 10y = e^x$ es una ecuación diferencial de tercer orden, lineal y no homogénea. En este contexto, la palabra ***homogénea*** no indica que los coeficientes sean funciones homogéneas, como sucedía en la sección 2.4.

Para resolver una ecuación lineal no homogénea como la (7), en primera instancia debemos poder resolver la ecuación homogénea asociada (6).

Nota

Para evitar repeticiones inútiles en el resto del libro, establecemos las siguientes hipótesis importantes al enunciar definiciones y teoremas acerca de las ecuaciones lineales (6) y (7): En un intervalo común I:

- Los coeficientes $a_i(x), i = 0, 1, 2, \ldots, n$ son continuos
- El lado derecho, g(x), es continuo
- $a_n(x) \neq 0$ para toda x en el intervalo

Operadores diferenciales En cálculo, la diferenciación suele indicarse con la D mayúscula; esto es, $dy/dx = Dy$. El símbolo D se llama **operador diferencial** porque transforma una función diferenciable en otra función; por ejemplo, $D(\cos 4x) = -4 \operatorname{sen} 4x$ y $D(5x^3 - 6x^2) = 15x^2 - 12x$. Las derivadas de orden superior se pueden expresar en términos de D en forma natural:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = D(Dy) = D^2y \qquad \text{y en general} \qquad \frac{d^ny}{dx^n} = D^ny,$$

en donde y representa una función suficientemente diferenciable. Las expresiones polinomiales donde interviene D, como $D + 3$, $D^2 + 3D - 4$ y $5x^3D^3 - 6x^2D^2 + 4xD + 9$ también son operadores diferenciales. En general, el **operador diferencial de orden n** se define:

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x). \tag{8}$$

Como consecuencia de dos propiedades básicas de la diferenciación, $D(cf(x)) = cDf(x)$, donde c es una constante y $D\{f(x) + g(x)\} = Df(x) + Dg(x)$, el operador diferencial L tiene una propiedad de **linealidad**; es decir, L, operando sobre una combinación lineal de dos funciones diferenciables, es lo mismo que una combinación lineal de L operando sobre las funciones individuales. En símbolos, esto significa que

$$L\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha L(f(x)) + \beta L(g(x)), \tag{9}$$

en donde α y β son constantes. A causa de la propiedad (9), se dice que el operador diferencial de orden **n, L, es un operador lineal.**

Ecuaciones diferenciales Toda ecuación diferencial lineal se puede expresar en notación D; por ejemplo, la ecuación diferencial $y'' + 5y' + 6y = 5x - 3$ se puede escribir en la forma $D^2y + 5Dy + 6y = 5x - 3$ o como $(D^2 + 5D + 6)y = 5x - 3$. Al aplicar la ecuación (8), las ecuaciones diferenciales (6) y (7) de orden n se pueden escribir en forma compacta como

$$L(y) = 0 \quad Y \quad L(y) = g(x),$$

respectivamente.

Principio de superposición En el siguiente teorema veremos que la suma o **superposición** de dos o más soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea también es una solución.

TEOREMA 4.2 **Principio de superposición, ecuaciones homogéneas**

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_k$ soluciones de la ecuación diferencial homogénea de orden n, ecuación (6), donde x esta en un intervalo I. La combinación lineal

$$Y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ky_k(x),$$

en donde las c_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ son constantes arbitrarias, también es una solución cuando x está en el intervalo.

DEMOSTRACIÓN Probaremos el caso $k = 2$. Sea L el operador diferencial definido en (8) y sean $y_1(x)$ y $y_2(x)$ soluciones de la ecuación homogénea L(y) = 0. Si definimos y = $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, entonces, por la linealidad de L,

$$L(y) = L\{c_1y_1(x) + c_2 y_2(x)\} = c_1L(y_1) + c_2L(y_2) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$$

■

Corolarios al teorema 4.2

(A) Un múltiplo constante, $y = c_1y_1(x)$, de una solución $y_1(x)$ de una ecuación diferencial lineal homogénea también es una solución.
(B) Una ecuación diferencial lineal homogénea siempre tiene la solución trivial $y = 0$.

EJEMPLO 4 **Superposición, ecuación diferencial homogénea**

Las funciones $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^2 \ln x$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea $x^3y''' - 2xy' + 4y = 0$ para x en el intervalo $(0, \infty)$. Según el principio de superposición, la combinación lineal

$$y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x$$

también es una solución de la ecuación en el intervalo. ■

La función y = e^{7x} es una solución de y" - 9y' + 14y = 0. Como la ecuación diferencial es lineal y homogénea, el múltiplo constante y = ce^{7x} también es una solución. Cuando c tiene diversos valores, y = $9e^{7x}$, y = 0, y = $-\sqrt{5}\ e^{7x}$, . . . son soluciones de la ecuación.

Dependencia e independencia lineal Citaremos un par de conceptos básicos para estudiar ecuaciones diferenciales lineales.

DEFINICIÓN 4.1 **Dependencia o independencia lineal**

Se dice que un conjunto de **funciones, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ es linealmente dependiente** en un intervalo I si existen constantes, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no **todas cero, tales que**

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x) = 0$$

para toda x en el intervalo. Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente intervalo, se dice que es linealmente independiente.

En otras palabras, un conjunto de funciones es linealmente independiente en un intervalo si las únicas constantes para las que se cumple

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \ldots + c_nf_n(x) = 0$$

para toda x en el intervalo son $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Es fácil comprender estas definiciones en el caso de dos funciones, $f_1(x)$ y $f_2(x)$. Si las funciones son linealmente dependientes en un intervalo, existen constantes, c_1 y c_2, que no son cero a la vez, tales que, para toda x en el intervalo, $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$; por consiguiente, si suponemos que $c_1 \neq 0$, entonces

$$f_1(x) = -\frac{c_2}{c_1} f_2(x);$$

esto es, ***si dos funciones son linealmente dependientes, entonces una es un múltiplo constante de la otra.*** Al revés, si $f_1(x) = c_2 f_2(x)$ para alguna constante c_2, entonces

$$(-1) \cdot f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$$

para toda x en algún intervalo. Así, las funciones son linealmente dependientes porque al menos una de las constantes no es cero (en este caso c_1 = -1). Llegamos a la conclusión de que ***dos funciones son linealmente independientes cuando ninguna es múltiplo constante de la otra*** en un intervalo. Por ejemplo, las funciones $f_1(x) = \text{sen } 2x$ y $f_2(x) = \text{sen } x \cos x$ son linealmente dependientes en $(-\infty, \infty)$ porque $f_1(x)$ es múltiplo constante de $f_2(x)$. Con base en la fórmula de doble ángulo para el seno, recuérdese que sen $2x$ = 2 sen x cos x. Por otro lado, las funciones $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = |x|$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$. Al ver la figura 4.3 el lector se debe convencer de que ninguna de las funciones es un múltiplo constante de la otra, en el intervalo.

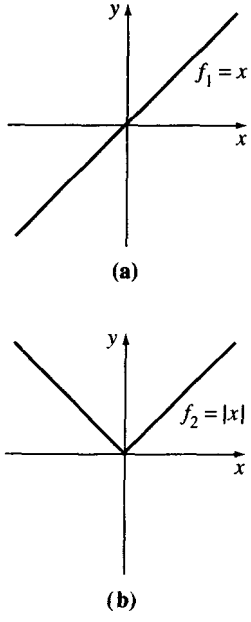


FIGURA 4.3

De lo anterior se concluye que el cociente $f_2(x)/f_1(x)$ no es constante en un intervalo en que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son linealmente independientes. En la siguiente sección utilizaremos este detalle.

EJEMPLO 5 **Funciones linealmente dependientes**

Las funciones $f_1(x) = \cos^2 x$, $f_2(x) = \operatorname{sen}^2 x$, $f_3(x) = \sec^2 x$, $f_4(x) = \tan^2 x$ son linealmente dependientes en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ porque

$$c_1 \cos^2 x + c_2 \operatorname{sen}^2 x + c_3 \sec^2 x + c_4 \tan^2 x = 0,$$

cuando $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = -1$, $c_4 = 1$. Hemos aplicado $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ y $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$. ■

Un conjunto de funciones, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, es linealmente dependiente en un intervalo si se puede expresar al menos una función como combinación lineal de las funciones restantes.

EJEMPLO 6 **Funciones linealmente dependientes**

Las funciones $f_1(x) = \sqrt{x} + 5$, $f_2(x) = \sqrt{x} + 5x$, $f_3(x) = x - 1$, $f_4(x) = x^2$ son linealmente dependientes en el intervalo $(0, \infty)$ porque f_2 se puede escribir como una combinación lineal de f_1, f_3 y f_4. Obsérvese que

$$f_2(x) = 1\, f_1(x) + 5 \cdot f_3(x) + 0 \cdot f_4(x)$$

para toda x en el intervalo $(0, \infty)$. ■

Soluciones de ecuaciones diferenciales Ante todo, nos interesan las funciones linealmente independientes o, con más precisión las soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal. Aunque siempre podemos recurrir a la definición 4.1, sucede que el asunto de si son linealmente independientes las n soluciones, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de una ecuación diferencial lineal de orden n como la (6) se puede definir mecánicamente recurriendo a un determinante.

DEFINICIÓN 4.2 **El wronskiano**

Supóngase que cada una de las funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ posee $n - 1$ derivadas al menos. El determinante

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ & & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

en donde las primas representan las derivadas, es el wronskiano de las funciones.

TEOREMA 4.3 **Criterio para soluciones linealmente independientes**

sean n soluciones, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, de la ecuación diferencial (6), lineal, homogénea y de orden n, en un intervalo I. Entonces, el conjunto de soluciones es **linealmente independiente** en I si y sólo si

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$$

para toda x en el intervalo.

De acuerdo con el teorema 4.3, cuando $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son n soluciones de (6) en un intervalo I, el wronskiano $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ es idéntico a cero o nunca cero en el intervalo.

Un conjunto de n soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n tiene un nombre especial.

DEFINICIÓN 4.3 **Conjunto fundamental de soluciones**

Todo conjunto $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de n soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n, ecuación (6), en un intervalo I, se llama **conjunta fundamental de** soluciones en el intervalo.

El asunto básico de si existe un conjunto fundamental de soluciones de una ecuación lineal se contesta con el siguiente teorema.

TEOREMA 4.4 **Existencia de un conjunto fundamental**

Existe un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n, (6), en un intervalo I.

Así como cualquier vector en tres dimensiones se puede expresar en forma de una combinación lineal de los vectores i, **j, k, *linealmente independientes,*** toda solución de una ecuación diferencial lineal homogénea y de orden n, en un intervalo I, se puede expresar como una combinación lineal de n soluciones linealmente independientes en Z. En otras palabras, n soluciones linealmente independientes $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ son las unidades constructivas básicas de la solución general de la ecuación.

TEOREMA 4.5 **Solución general, ecuaciones homogéneas**

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n, (6), en un intervalo I. La **solución general** de la ecuación en el intervalo es

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x),$$

donde c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes arbitrarias.

El teorema 4.5 establece que si Y(x) es cualquier solución de (6) en el intervalo, siempre se pueden determinar las constantes Cr, C_2, . . ., C_n de tal modo que

$$Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x).$$

A continuación demostraremos el caso cuando n = 2.

DEMOSTRACIÓN Sea Y una solución y **sean** y_1 y y_2 soluciones linealmente independientes de a_2 y" + a_1 y' + a_0y = 0 en un intervalo I. Supongamos que $x = t$ es un punto en I para el que $W(y_1(t), y_2(t)) \neq 0$. Consideremos, también, que Y(r) = k_1 y que Y'(t) = k_2. Si examinamos las ecuaciones

$$C_1y_1(t) + C_2y_2(t) = k_1$$
$$C_1y_1'(t) + C_2y_2'(t) = k_2,$$

veremos que podemos determinar C_1 y C_2 en forma única, siempre que el determinante de los coeficientes satisfaga

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pero este determinante no es más que el wronskiano evaluado en $x = t$, y, por hipótesis, $W \neq 0$. Si definimos G(x) = $C_1y_1(x)$ + $C_2y_2(x)$, veremos que i) G(x) satisface la ecuación diferencial porque es una superposición de dos soluciones conocidas, **ii)** G(x) satisface las condiciones iniciales

$$G(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) = k_1$$
$$G'(t) = C_1y_1'(t) + C_2y_2'(t) = k_2;$$

iii) Y(x) satisface *Za misma* ecuación lineal y *las mismas* condiciones iniciales. Como la solución de este problema lineal de valor inicial es única (teorema 4. 1), entonces Y(x) = G(x), o bien Y(x) = $C_1y_1(x)$ + $C_2y_2(x)$. ■

EJEMPLO 7 Solución general de una ecuación diferencial homogénea

Las funciones $y_1 = e^{3x}$ y $y_2 = e^{-3x}$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea/' − $9y$ = 0 en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Por inspección, las soluciones son linealmente independientes en todos los reales o en todo R. Podemos corroborar esto al observar que el wronskiano

$$W(e^{3x}, e^{-3x}) = \begin{matrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{matrix} = -6 \neq 0$$

para toda x. Llegamos a la conclusión de que y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones y, en consecuencia,

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$$

es la solución general de la ecuación en el intervalo. ■

EJEMPLO 8 **Solución obtenida a partir de una solución general**

La función $y = 4 \operatorname{senh} 3x - 5e^{3x}$ es una solución de la ecuación diferencial del ejemplo 7. (Confíe esta afirmación.) Según el teorema 4.5, podremos obtener esta solución a partir de la solución general $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$. Obsérvese que si elegimos $c_1 = 2$ y $c_2 = -7$, entonces $y = 2e^{3x} - 7e^{-3x}$ se puede escribir en la forma

$$y = 2e^{3x} - 2e^{-3x} - 5e^{-3x} = 4\left(\frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2}\right) - 5e^{-3x}.$$

Esta última expresión es $y = 4 \operatorname{senh} 3x - 5e^{-3x}$. ■

EJEMPLO 9 **Solución general de una ecuación diferencial homogénea**

Las funciones $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ y $y_3 = e^{3x}$ satisfacen la ecuación de tercer orden

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 0.$$

Como
$$W(e^x, e^{2x}, e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq \text{Cl}$$

para todo valor real de x, las funciones y_1, y_2 y y_3 forman un conjunto fundamental de soluciones en $(-\infty, \infty)$. En conclusión,

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

es la solución general de la ecuación diferencial en el intervalo. ■

4.1.3 Ecuaciones no homogéneas

Toda función y_p libre de parámetros arbitrarios que satisface la ecuación (7) se llama **solución particular o integral particular** de la ecuación; por ejemplo, se puede demostrar directamente que la función constante $y_p = 3$ es una solución particular de la ecuación no homogénea $y'' + 9y = 27$.

Si $y_1, y_2, \ldots, y_k$ son soluciones de la ecuación (6) en un intervalo Zy y_p es cualquier solución particular de la ecuación (7) en Z, entonces, la combinación lineal

$$\mathbf{y} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_k y_k(x) + Y_P \qquad \textbf{(10)}$$

también es una solución de la ecuación (7) no homogénea. Si el lector lo medita tiene sentido, ya que la combinación lineal $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_k y_k(x)$ se transforma en 0 mediante el operador $L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$, mientras que y_p se convierte en g(x). Si usamos $k = n$ soluciones linealmente independientes de la ecuación (6) de orden n, la expresión (10) viene a ser la solución general de (7).

TEOREMA 4.6 **Solución general, ecuaciones no homogéneas**

Sea y_p cualquier solución particular de la ecuación diferencial lineal, no homogénea, de orden n, ecuación (7), en un intervalo I, y sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada (6), en I. Entonces, la **solución general** de la ecuación en el intervalo es

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + y_p,$$

en donde las c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes arbitrarías.

DEMOSTRACIÓN Sea L el operador diferencial definido en (8) y sean $Y(x)$ y $y_p(x)$ soluciones particulares de la ecuación no homogénea $L(y) = g(x)$. Si definimos $u(x) = Y(x) - y_p(x)$, por la linealidad de L se debe cumplir

$$L(u) = L\{Y(x) - y_p(x)\} = L(Y(x)) - L(y_p(x)) = g(x) - g(x) = 0.$$

Esto demuestra que $u(x)$ es una solución de la ecuación homogénea $L(y) = 0$; por consiguiente, según el teorema 4.5, $u(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$, y así

$$Y(x) - y_p(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

o sea

$$Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + y_p(x). \quad \blacksquare$$

Función complementaria En el teorema 4.6 vemos, que la solución general de una ecuación lineal no homogénea consiste en la suma de dos funciones:

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + y_p(x) = y_c(x) + y_p(x).$$

La combinación lineal $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$, que es la solución general de (6), se llama **función complementaria** para la ecuación (7). En otras palabras, para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea primero se resuelve la ecuación homogénea asociada y luego se determina cualquier solución particular de la ecuación no homogénea. La solución general de la ecuación no homogénea es, entonces,

$$y = \textit{función complementaria} + \textit{cualquier solución particular}.$$

EJEMPLO 10 **Solución general de una ecuación diferencial no homogénea**

Se demuestra fácilmente por sustitución que la función $y_p = -\frac{11}{12} - \frac{1}{2}x$ es una solución particular de la ecuación no homogénea

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 3x. \tag{11}$$

Para llegar a la solución general de (11), también debemos resolver la ecuación homogénea asociada

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 0.$$

Pero en el ejemplo 9 vimos, que la solución general de esta última ecuación era $y_c = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$; por lo tanto, la solución general de (ll) en el intervalo es

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} - \frac{11}{12} - \frac{1}{2}x. \quad \blacksquare$$

Otro principio de superposición El último teorema en esta discusión nos será útil en la sección 4.4, cuando estudiemos un método para determinar soluciones particulares de ecuaciones no homogéneas.

TEOREMA 4.7 Principio de **superposición, ecuaciones no homogéneas**

Sean k soluciones particulares, $y_{p_1}, y_{p_2}, \ldots, y_{p_k}$, de la ecuación (7), diferencial lineal no homogénea de orden n, en el intervalo I que, a su vez, corresponden a k funciones distintas, $g_1, g_2, \ldots, g_k$. Esto es, supongamos que y_{p_i} representa una solución particular de la ecuación diferencial correspondiente

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_i(x), \tag{12}$$

en donde $i = 1, 2, \ldots, k$. Entonces

$$y_p = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_k}(x) \tag{13}$$

es una solución particular de

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_k(x). \tag{14}$$

DEMOSTRACIÓN Probaremos el caso en que $k = 2$. Sea L el operador diferencial definido en (8) y sean $y_{p_1}(x)$ y $y_{p_2}(x)$ soluciones particulares de las ecuaciones no homogéneas $L(y) = g_1(x)$ y $L(y) = g_2(x)$, respectivamente. Si definimos $y_p = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$, demostraremos que y_p es una solución particular de $L(y) = g_1(x) + g_2(x)$. De nuevo, el resultado, es consecuencia de la linealidad del operador L:

$$L(y_p) = L\{y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)\} = L(y_{p_1}(x)) + L(y_{p_2}(x)) = g_1(x) + g_2(x).$$

$\blacksquare$

EJEMPLO 11 Superposición, ecuaciones diferenciales no homogéneas

El lector debe comprobar que

$y_{p_1} = -4x^2$ es una solución particular de $y'' - 3y' + 4y = -16x^2 + 24x - 8$,

$y_{p_2} = e^{2x}$ es una solución particular de $y'' - 3y' + 4y = 2e^{2x}$

$y_{p_3} = xe^x$ es una solución particular de $y'' - 3y' + 4y = 2xe^x - e^x$

De acuerdo con el teorema 4.7, la superposición de y_{p_1}, y_{p_2} Y y_{p_3}

$$y = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} = -4x^2 + e^{2x} + xe^x,$$

es una solución de

$$y'' - 3y' + 4y = \underbrace{-16x^2 + 24x - 8}_{g_1(x)} + \underbrace{2e^{2x}}_{g_2(x)} + \underbrace{2xe^x - e^x}_{g_3(x)}.$$

■

Nota

Si las y_{p_i} son soluciones particulares de la ecuación (12) para $i = 1, 2, \ldots, k$, la combinación lineal

$$y_p = c_1 y_{p_1} + c_2 y_{p_2} + \cdots + c_k y_{p_k},$$

en donde las c_i son constantes, también es una solución particular de (14), cuando el lado derecho de la ecuación es la combinación lineal

$$c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \cdots + c_k g_k(x).$$

Antes de comenzar a resolver ecuaciones diferenciales lineales homogéneas y no homogéneas, veamos algo de la teoría que presentaremos en la próxima sección.

Observación

Esta observación es la continuación de la cita sobre los sistemas dinámicos que apareció al final de la sección 1.3.

Un sistema dinámico cuya regla o modelo matemático es una ecuación diferencial lineal de orden n,

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)$$

se llama sistema lineal de orden n. Las n funciones dependientes del tiempo, $y(t)$, $y'(t)$, . ., $y^{(n-1)}(t)$ son las **variables de estada** del sistema. Ya sabemos que sus valores, en el momento t, determinan el estado del **sistema.** La función g tiene varios nombres: **función de entrada, forzamiento, entrada** o **función de excitación.** Una solución $y(t)$ de la ecuación diferencial se llama **salida o respuesta del sistema.** En las condiciones mencionadas en el teorema 4.1, la salida o respuesta $y(t)$ está determinada en forma única, por la entrada y el estado del sistema en el momento t_0; esto es, por las condiciones iniciales $y(t_0)$, $y'(t_0)$, . . . , $y^{(n-1)}(t_0)$. En la figura 4.4 vemos la dependencia entre la salida y la entrada.

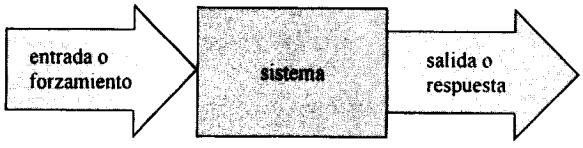


FIGURA 4.4

Para que un sistema dinámico sea sistema lineal, se necesita que el principio de superposición, teorema 4.7, sea válido en él; o sea, que la respuesta del sistema a una superposición de entradas sea una superposición de salidas. Ya examinamos algunos sistemas lineales sencillos en la sección 3.1 (ecuaciones lineales de primer orden); en la sección 5.1 examinaremos los sistemas lineales para los cuales los modelos matemáticos son ecuaciones diferenciales de segundo orden.

EJERCICIOS 4.1

4.1.1

1. Dado que $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ es una familia a dos **parámetros** de soluciones de $y'' - y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$, determine un miembro de la familia que satisfaga las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
2. Determine una solución de la ecuación diferencial del problema 1 que satisfaga las condiciones en la **frontera** $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.
3. Dado que $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-x}$ es una familia a dos parámetros de soluciones de $y'' - 3y' - 4y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$, determine un miembro de la familia que satisfaga las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
4. Dado que $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x$ es una familia a tres **parámetros** de soluciones de $y''' + y' = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$, **defina** un miembro de la familia que cumpla las condiciones iniciales $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 2$, $y''(\pi) = -1$.
5. Como $y = c_1x + c_2x \ln x$ es una familia a dos parámetros de soluciones de $x^2y'' - xy' + y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$, determine un miembro de la familia que satisfaga las condiciones **iniciales** $y(1) = 3$, $y'(1) = -1$.
6. Puesto que $y = c_1 + c_2x^2$ es una familia a dos parámetros de soluciones de $xy'' - y' = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$, demuestre que las constantes c_1 y c_2 no pueden ser **tales** que un miembro de la familia cumpla las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Explique por qué lo anterior no contradice al teorema 4.1.
7. Determine dos miembros de la familia de soluciones de $xy'' - y' = 0$, del problema 6, que satisfagan las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
8. Halle un miembro de la familia de soluciones a $xy'' - y' = 0$ del problema 6, que satisfaga las condiciones a la **frontera** $y(0) = 1$, $y'(1) = 6$. ¿El teorema 4.1 garantiza que esta solución sea única?
9. Puesto que $y = c_1e^x \cos x + c_2e^x \operatorname{sen} x$ es una familia a dos parámetros de soluciones de $y'' - 2y' + 2y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$, determine si es posible que un miembro de la familia pueda satisfacer las siguientes condiciones en la **frontera**:

   a) $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ b) $y(0) = 1, y(\pi) = -1$

   c) $y(0) = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ d) $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

10. En virtud de que $y = c_1x^2 + c_2x^4 + 3$ es una familia a dos parámetros de soluciones de $x^2y'' - 5xy' + 8y = 24$, en el intervalo $(-\infty, \infty)$, determine si es posible que un miembro de la familia satisfaga estas condiciones en la **frontera**:

    a) $y(-1) = 0$, $y(1) = 4$ b) $y(0) = 1$, $y(1) = 2$

    c) $y(0) = 3$, $y(1) = 0$ d) $y(1) = 3$, $y(2) = 15$.

En los problemas 11 y 12, defina un intervalo que abarque x = 0 para el cual el problema de valor inicial correspondiente tenga solución única.

11. $(x-2)y'' + 3y = x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

12. $y'' + (\tan x)y = e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

13. En vista de que $x = c_1 \cos wt + c_2 \operatorname{sen} wt$ es una familia a dos parámetros de soluciones de $x'' + \omega^2 x = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$, demuestre que una solución que cumple las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$ es

$$x(t) = x_0 \cos wt + \frac{x_1}{\omega} \operatorname{sen} wt.$$

14. Use la familia a dos parámetros $x = c_1 \cos wt + c_2 \operatorname{sen} wt$ para probar que una solución de la ecuación diferencial que satisface $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$ es la solución del problema de valor inicial en el "problema 13", desplazada o recorrida la cantidad t_0:

$$x(t) = x_0 \cos w(t - t_0) + \frac{x_1}{\omega} \operatorname{sen} w(t - t_0).$$

4.1.2

En los problemas 15 a 22 compruebe si las funciones respectivas son linealmente independientes o dependientes en $(-\infty, \infty)$.

15. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = 4x - 3x^2$

16. $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = e^x$

17. $f_1(x) = 5$, $f_2(x) = \cos^2 x$, $f_3(x) = \operatorname{sen}^2 x$

18. $f_1(x) = \cos 2x$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = \cos^2 x$

19. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x - 1$, $f_3(x) = x + 3$

20. $f_1(x) = 2 + x$, $f_2(x) = 2 + |x|$

21. $f_1(x) = 1 + x$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$

22. $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{-x}$, $f_3(x) = \operatorname{senh} x$

En los problemas 23 a 30 compruebe que las funciones dadas forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial en el intervalo indicado. Forme la solución general.

23. $y'' - y' - 12y = 0$; e^{-3x}, e^{4x}, $(-\infty, \infty)$

24. $y'' - 4y = 0$; $\cosh 2x$, $\operatorname{senh} 2x$, $(-\infty, \infty)$

25. $y'' - 2y' + 5y = 0$; $e^x \cos 2x$. $e^x \operatorname{sen} 2x$, $(-\infty, \infty)$

26. $4y'' - 4y' + y = 0$; $e^{x/2}$, $xe^{x/2}$, $(-\infty, \infty)$

27. $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$; x^3, x^4, $(0, \infty)$

28. $x^2y'' + xy' + y = 0$; $\cos(\ln x)$, $\operatorname{sen}(\ln x)$, $(0, \infty)$

29. $x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0$; x, x^{-2}, $x^{-2} \ln x$, $(0, \infty)$

30. $y^{(4)} + y'' = 0$; $1, x, \cos x, \operatorname{sen} x$, $(-\infty, \infty)$

Problemas para discusión

31. **a)** Compruebe que $y_1 = x^3$ y $y_2 = |x|^3$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

b) Demuestre que $W(y_1, y_2) = 0$ para todo numero real x. ¿Este resultado contradice el teorema 4.3? Explique su respuesta.

c) Compruebe que $Y_1 = x^3$ y $Y_2 = x^2$ también son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial en la parte a), en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

d) Halle una solución de la ecuación diferencial que satisfaga y(O) = 0, y'(O) = 0.

e) Según el principio de superposición, teorema 4.2, las combinaciones lineales

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \quad \text{y} \quad Y = c_1Y_1 + c_2Y_2$$

son soluciones de la ecuación diferencial. Diga si una, ambas o ninguna de las combinaciones lineales es una solución general de la ecuación diferencial en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

32. Suponga que $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{-x}$ son dos soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea. Explique por qué $y_3 = \cosh x$ y $y_4 = \text{senh } x$ también son soluciones de la ecuación.

4.1.3

Compruebe que la familia biparamétrica de funciones dadas en los problemas 33 a 36 sea la solución general de la ecuación diferencial no homogénea en el intervalo indicado.

33. $y'' - 7y' + 10y = 24e^x$
$y = c_1e^{2x} + c_2e^{5x} + 6e^x, \quad (-\infty, \infty)$

34. $y'' + y = \sec x$
$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x + (\cos x) \ln(\cos x), \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

35. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4x - 12$
$y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + x^2e^{2x} + x - 2, \quad (-\infty, \infty)$

36. $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x$
$y = c_1x^{-1/2} + c_2x^{-1} + \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{6}x, \quad (0, \infty)$

37. Si $y_{p_1} = 3e^{2x}$ y $y_{p_2} = x^2 + 3x$ son soluciones particulares de

$$y'' - 6y' + 5y = -9e^{2x}$$

y

$$y'' - 6y' + 5y = 5x^2 + 3x - 16,$$

respectivamente, determine soluciones particulares de

$$y'' - 6y' + 5y = 5x^2 + 3x - 16 - 9e^{2x}$$

y

$$y'' - 6y' + 5y = -10x^2 - 6x + 32 + e^{2x}.$$

38. a) Halle, por inspección una solución particular de $y'' + 2y = 10$.

b) Determine por inspección una solución particular de $y'' + 2y = -4x$.

c) Halle una solución particular de $y'' + 2y = -4x + 10$.

d) Determine una solución particular de $y'' + 2y = 8x + 5$.

4.2 REDUCCIÓN DE ORDEN

- *Reducción de una ecuación diferencial de segundo orden a una de primer* orden
- *Forma reducida de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden*

Uno de los hechos matemáticos más interesantes al estudiar ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden es que podemos formar una segunda solución, y_2, de

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{1}$$

en un intervalo Z a partir de una solución y_1 no trivial. Buscamos una segunda solución, $y_2(x)$, de la ecuación (1) tal que y_1 y y_2 sean lineahnente independientes en Z. Recordemos que si y_1 y y_2 son lineahnente independientes, su **relación** y_2/y_1 es no constante en I; esto es, $y_2/y_1 =$ u(x) o $y_2 = u(x)y_1(x)$. La idea es determinar la función $u(x)$ sustituyendo $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ en la ecuación diferencial dada. Este método se llama **reducción de orden** porque debemos resolver una ecuación lineal ***de primer orden*** para hallar u.

EJEMPLO 1 **Segunda solución por reducción de orden**

Si $y_1 = e^x$ es una solución dey" $- y = 0$ en el intervalo $(-00, \infty)$, aplique la reducción de orden para determinar una segunda solución, y_2.

SOLUCIÓN Si y $= u(x)y_1(x) = u(x)e^x$, según la regla del producto

$$y' = ue^x + e^xu', \qquad y'' = ue^x + 2e^xu' + e^xu'',$$

y así

$$y" - y = e^x(u'' + 2u') = 0.$$

Puesto que $e^x \neq 0$, para esta ultima ecuación se requiere que $u'' + 2u' = 0$. Al efectuar la sustitución $w =$ u', esta **ecuación** lineal de segundo orden en u se transforma en $w' + 2w = 0$, una ecuación lineal de primer orden en w. Usamos el factor integrante e^{2x} y así podemos escribir

$$\frac{d}{dx}[e^{2x}w] = 0.$$

Después de integrar se obtiene w = c_1e^{-2x}, o sea que u' = c_1e^{-2x}. Integramos de nuevo y llegamos a

$$u = -\frac{c_1}{2}e^{-2x} + c_2.$$

Por consiguiente,

$$y = u(x)e^x = -\frac{c_1}{2}e^{-x} + c_2e^x. \tag{2}$$

Al elegir $c_2 = 0$ y $c_1 = -2$ obtenemos la segunda solución que buscábamos, $y_2 = e^{-x}$. Dado que $W(e^x, e^{-x}) \neq 0$ para toda x, las soluciones son lineahnente independientes en $(-\infty, \infty)$. ■

Como hemos demostrado que $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{-x}$ son soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal de segundo orden, la ecuación (2) es la solución general de $y'' - y = 0$ en $(-\infty, \infty)$.

Caso general Si dividimos por $a_2(x)$ para llevar la ecuación (1) a la **forma estándar**

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{3}$$

en donde $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en algún intervalo I. Supóngase, ademas, que $y_1(x)$ es una solución conocida de (3) en I y que $y_1(x) \neq 0$ para toda x en el intervalo. Si definimos que $y = u(x)y_1(x)$, entonces

$$y' = uy_1' + y_1u', \qquad y'' = uy_1'' + 2y_1'u' + y_1u''$$

$$y'' + Py' + Qy = \underbrace{u[y_1'' + Py_1' + Qy_1]}_{\text{cero}} + y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0.$$

Para lo anterior se debe cumplir

$$y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0 \quad \text{o sea} \quad y_1w' + (2y_1' + Py_1)w = 0, \tag{4}$$

en donde hemos igualado $w = u'$. Obsérvese que la última de las ecuaciones (4) es lineal y separable, a la vez. Al separar las variables e integrar obtenemos

$$\frac{dw}{w} + 2\frac{y_1'}{y_1}dx + P\,dx = 0$$

$$\ln|wy_1^2| = -\int P\,dx + c \quad \text{o sea} \quad wy_1^2 = c_1e^{-\int P\,dx}.$$

De la última ecuación despejamos w, regresamos a $w = u'$ e integramos de nuevo:

$$u = c_1\int \frac{e^{-\int P\,dx}}{y_1^2}dx + c_2.$$

Si elegimos $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$, vemos en $y = u(x)y_1(x)$ que una segunda solución de la ecuación (3) es

$$y_2 = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx. \tag{5}$$

Un buen repaso de la derivación sera comprobar que la función $y_2(x)$ definida en la ecuación (5) satisface la ecuación (3) y que y_1 y y_2 son linealmente independientes en cualquier intervalo en que y_1 no sea cero. Véase el problema 29, de los ejercicios 4.2.

EJEMPLO 2 **Segunda solución con la fórmula (5)**

La función $y_1 = x^2$ es una solución de $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$. Determine la solución general en el intervalo $(0, \infty)$.

SOLUCIÓN Partimos de la forma reducida de la ecuación,

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0,$$

y vemos, de acuerdo con (5), que $y_2 = x^2 \int \frac{e^{3\int dx/x}}{x^4}\,dx$ $\leftarrow e^{3\int dx/x} = e^{\ln x^3} = x^3$

$$= x^2 \int \frac{dx}{x} x^2 \ln x.$$

La solución general en (0, ∞) esta **definida** por $y = c_1y_1 + c_2 y_2$; esto es,

$$y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x.$$

Observación

Hemos deducido la ecuación (5) e ilustrado cómo usarla porque esa fórmula aparecerá de nuevo en la siguiente sección y en la sección 6.1. Usamos la ecuación (5) sólo para ahorrar tiempo en la obtención del resultado deseado. El profesor dirá si se debe memorizar la ecuación (5) o dominar las bases de la reducción de orden,

EJERCICIOS 4.2

Determine una segunda solución en cada ecuación diferencial de los problemas 1 a 24. Use la reducción de orden o la fórmula (5) como acabamos de explicar. Suponga un intervalo adecuado de validez.

1. $y'' + 5y' = 0;\ y_1 = 1$
2. $y'' - y' = 0;\ y_1 = 1$
3. $y'' - 4y' + 4y = 0;\ y_1 = e^{2x}$
4. $y'' + 2y' + y = 0;\ y_1 = xe^{-x}$
5. $y'' + 16y = 0;\ y_1 = \cos 4x$
6. $y'' + 9y = 0;\ y_1 = \operatorname{sen} 3x$
7. $y'' - y = 0;\ y_1 = \cosh x$
8. $y'' - 25y = 0;\ y_1 = e^{5x}$
9. $9y'' - 12y' + 4y = 0;\ y_1 = e^{2x/3}$
10. $6y'' + y' - y = 0;\ y_1 = e^{x/3}$
11. $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0;\ y_1 = x^4$
12. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0;\ y_1 = x^2$
13. $xy'' + y' = 0;\ y_1 = \ln x$
14. $4x^2y'' + y = 0;\ y_1 = x^{1/2} \ln x$
15. $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0;\ y_1 = x + 1$

16. $(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0;\ y_1 = 1$

17. $x^2y'' - xy' + 2y = 0;\quad y_1 = x \operatorname{sen}(\ln x)$

18. $x^2y'' - 3xy' + 5y = 0;\quad y_1 = x^2 \cos(\ln x)$

19. $(1 + 2x)y'' + 4xy' - 4y = 0;\ y_1 = e^{-2x}$

20. $(1 + x)y'' + xy' - y = 0;\ y_1 = x$

21. $x^2y'' - xy' + y = 0;\ y_1 = x$

22. $x^2y'' - 2oy = 0;\ y, = x^{-4}$

23. $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0;\quad y_1 = x^3 \ln x$

24. $x^2y'' + xy' + y = 0;\quad y_1 = \cos(\ln x)$

Aplique el método de reducción para determinar una solución de la ecuación no homogénea dada en los problemas 25 a 28. La función indicada, $y_1(x)$, es una solución de la ecuación homogénea asociada. Determine una segunda solución de la ecuación homogénea y una solución particular de la ecuación no homogénea.

25. $y'' - 4y = 2;\ y_1 = e^{-2x}$

26. $y'' + y' = 1;\ y_1 = 1$

27. $y'' - 3y' + 2y = 5e^{3x};\quad y_1 = e^x$

28. $y'' - 4y'' + 3y = x;,\ y_1 = e^{ux}$

29. **a)** Compruebe por sustitución directa que la ecuación (5) satisface la ecuación (3).
b) Demuestre que $W(y_1(x), y_2(x)) = u'y_1^2 = e^{-\int P(x)dx}$.

Problema para discusión

30. **a)** Haga una demostración convincente de que la ecuación de segundo orden uy'' + *by'* + $cy = 0$, a, b y c constantes siempre tiene cuando menos una solución de la forma $y_1 = e^{m_1x}$, donde m_1 es una constante.

b) Explique por qué la ecuación diferencial en la parte a) debe tener, en consecuencia, una segunda solución de la forma $y_2 = e^{m_2x}$ o de la forma $y_2 = xe^{m_1x}$, donde m_1 y m_2 son constantes.

c) Vuelva a revisar los problemas 1 a 10. ¿Puede explicar por qué las respuestas a los problemas 5 a 7 no contradicen las afirmaciones en las partes a) y b)?

4.3 ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

■ *Ecuación auxiliar* ■ *Raíces de una ecuación auxiliar cuadrática* ■ *Fórmula de Euler* ■ *Formas de la solución general de una ecuación diferencial lineal y homogénea de segundo orden con coeficientes constantes* ■ *Ecuaciones diferenciales de orden superior* ■ *Raíces da ecuaciones auxiliares de grado mayor que dos*

Hemos visto que la ecuación lineal de primer orden, $dy/dx + uy = 0$, donde a es una constante, tiene la solución exponencial $y = c_1 e^{-ax}$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$; por consiguiente, lo más natural

es tratar de determinar si existen soluciones exponenciales en $(-\infty, \infty)$ de las ecuaciones lineales homogéneas de orden superior del tipo

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{1}$$

en donde los coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes reales y $a_n \neq 0$. Para nuestra sorpresa, todas las soluciones de la ecuación (1) son funciones exponenciales o están formadas a partir de funciones exponenciales.

Método de solución Comenzaremos con el caso especial de la ecuación de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

Si probamos con una solución de la forma $y = e^{mx}$, entonces $y' = me^{mx}$ y $y'' = m^2e^{mx}$, de modo que la ecuación (2) se transforma en

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \quad \text{o sea} \quad e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0.$$

Como e^{mx} nunca es cero cuando x tiene valor real, la única forma en que la función exponencial satisface la ecuación diferencial es eligiendo una m tal que sea una raíz de la ecuación cuadrática

$$am^2 + bm + c = 0. \tag{3}$$

Esta ecuación se llama **ecuación auxiliar o ecuación característica** de la ecuación diferencial (2). Examinaremos tres casos: las soluciones de la ecuación auxiliar que corresponden a raíces reales distintas, raíces reales e iguales y raíces complejas conjugadas.

CASO I: Raíces reales distintas Si la ecuación (3) tiene dos raíces reales distintas, m_1 y m_2, llegamos a dos soluciones, $y_1 = e^{m_1x}$ y $y_2 = e^{m_2x}$. Estas funciones son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$ y, en consecuencia, forman un conjunto fundamental. Entonces, la solución general de la ecuación (2) en ese intervalo es

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}. \tag{4}$$

CASO II: Raíces reales e iguales Cuando $m_1 = m_2$ llegamos, necesariamente, sólo a una solución exponencial, $y_1 = e^{m_1x}$. Según la fórmula cuadrática, $m_1 = -b/2a$ porque la única forma de que $m_1 = m_2$ es que $b^2 - 4ac = 0$. Así, por lo argumentado en la sección 4.2, una segunda solución de la ecuación es

$$y_2 = e^{m_1x} \int \frac{e^{2m_1x}}{e^{2m_1x}}\,dx = e^{m_1x} \int dx = xe^{m_1x}. \tag{5}$$

En esta ecuación aprovechamos que $-b/a = 2m_1$. La solución general es, en consecuencia,

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x}. \tag{6}$$

CASO III: Raíces complejos conjugados Si m_1 y m_2 son complejas, podremos escribir $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$, donde α y $\beta > 0$ y son reales, e $i^2 = -1$. No hay diferencia formal entre este caso y el caso 1; por ello,

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Sin embargo, en la práctica se prefiere trabajar con funciones reales y no con exponenciales complejas. Con este objeto se usa la formula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta,$$

en que θ es un número real. La consecuencia de esta fórmula es que

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x \quad \text{Y} \quad e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x, \tag{7}$$

en donde hemos empleado $\cos(-\beta x) = \cos\beta x$ y $\operatorname{sen}(-\beta x) = -\operatorname{sen}\beta x$. Obsérvese que si primero sumamos y después restamos las dos ecuaciones de (7), obtenemos respectivamente

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2\cos\beta x \quad \text{Y} \quad e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i \operatorname{sen}\beta x.$$

Como $y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$ es una solución de la ecuación (2) para cualquier elección de las constantes C_1 y C_2, si $C_1 = C_2 = 1$ y $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ obtenemos las soluciones:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} \quad \text{Y} \quad y_2 = e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Pero
$$y_1 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = 2e^{\alpha x}\cos\beta x$$

Y
$$y_2 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = 2ie^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x.$$

En consecuencia, según el corolario (A) del teorema 4.2, los dos últimos resultados demuestran que las funciones reales $e^{\alpha x}\cos\beta x$ y $e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ son soluciones de la ecuación (2). Además, esas soluciones forman un conjunto fundamental en $(-\infty, \infty)$; por lo tanto, la solución general es

$$y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$$

$$= e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\operatorname{sen}\beta x). \tag{8}$$

EJEMPLO 1 **Ecuaciones diferenciales de segundo orden**

Resuelva las ecuaciones diferenciales siguientes:

(a) $2y'' - 5y' - 3y = 0$ (b) $y'' - 10y' + 25y = 0$ (c) $y'' + y' + y = 0$

*Se puede deducir, formalmente, la fórmula de Euler a partir de la serie de Maclaurin $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, con la sustitución $x = i\theta$, utilizando $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, , y separando después la serie en sus partes real e imaginaria Luego de establecer esta posibilidad, podremos adoptar *cm 6' + i* sen θ como *definición de e?*

SOLUCIÓN Presentaremos las ecuaciones auxiliares, raíces y soluciones generales correspondientes.

(a) $2m^2 - 5m - 3 = (2m + 1)(m - 3) = 0$, $m_1 = -\frac{1}{2}$, $m_2 = 3$,
$y = c_1e^{-x/2} + c_2e^{3x}$

(b) $m^2 - 10m + 25 = (m - 5)^2 = 0$, $m_1 = m_2 = 5$,
$y = c_1e^{5x} + c_2xe^{5x}$

(c) $m^2 + m + 1 = 0$, $m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$,
$y = e^{-x/2}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ ■

EJEMPLO 2 **Problema de valor inicial**

Resuelva el problema de valor inicial

$$y'' - 4y' + 13y = 0, \qquad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2.$$

SOLUCIÓN Las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 - 4m + 13 = 0$ son $m_1 = 2 + 3i$ y $m_2 = 2 - 3i$, de modo que

$$y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x).$$

Al aplicar la condición $y(0) = -1$, vemos que $-1 = e^0(c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0)$ y que $c_1 = -1$. Diferenciamos la ecuación de arriba y a continuación, aplicando $y'(0) = 2$, obtenemos $2 = 3c_2 - 2$, o sea, $c_2 = \frac{4}{3}$; por consiguiente, la solución es

$$y = e^{2x}\left(-\cos 3x + \frac{4}{3}\operatorname{sen} 3x\right).$$ ■

Las dos ecuaciones diferenciales, $y'' + k^2y = 0$ y $y'' - k^2y = 0$, k real, son importantes en las matemáticas aplicadas. Para la primera, la ecuación auxiliar $m^2 + k^2 = 0$ tiene las raíces imaginarias $m_1 = ki$ y $m_2 = -ki$. Según la ecuación (8), con $\alpha = 0$ y $\beta = k$, la solución general es

$$y = c_1 \cos kx + c_2 \operatorname{sen} kx. \tag{9}$$

La ecuación auxiliar de la segunda ecuación, $m^2 - k^2 = 0$, tiene las raíces reales distintas $m_1 = k$ y $m_2 = -k$; por ello, su solución general es

$$y = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}. \tag{10}$$

Obsérvese que si elegimos $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ y después $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{2}$ en (10), llegamos a las soluciones particulares $y = (e^{kx} + e^{-kx})/2 = \cosh kx$ y $y = (e^{kx} - e^{-kx})/2 = \operatorname{senh} kx$. Puesto que $\cosh kx$ y $\operatorname{senh} kx$ son linealmente independientes en cualquier intervalo del eje x, una forma alternativa de la solución general de $y'' - k^2y = 0$ es

$$y = c_1 \cosh kx + c_2 \operatorname{senh} kx.$$

Ecuaciones de orden superior En general, para resolver una ecuación diferencial de orden n como

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{11}$$

en donde las a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes reales, debemos resolver una ecuación polinomial de grado n:

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \ldots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0. \tag{12}$$

Si todas las raíces de la ecuación (12) son reales y distintas, la solución general de la ecuación (ll) es

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ldots + c_n e^{m_n x}.$$

Es más difícil resumir los análogos de los casos II y III porque las raíces de una ecuación auxiliar de grado mayor que dos pueden presentarse en muchas combinaciones. Por ejemplo, una ecuación de quinto grado podría tener cinco raíces reales distintas, o tres raíces reales distintas y dos complejas, o una real y cuatro complejas, cinco reales pero iguales, cinco reales pero dos iguales, etcétera. Cuando m_1 es una raíz de multiplicidad k de una ecuación auxiliar de grado n (esto es, k raíces son iguales a m_1), se puede demostrar que las soluciones linealmente independientes son

$$e^{m_1 x}, \; x e^{m_1 x}, \; x^2 e^{m_1 x}, \ldots, \; x^{k-1} e^{m_1 x}$$

y que la solución general debe contener la combinación lineal

$$c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} + c_3 x^2 e^{m_1 x} + \ldots + c_k x^{k-1} e^{m_1 x}.$$

Por ultimo, recuérdese que cuando los coeficientes son reales, las raíces complejas de una ecuación auxiliar siempre aparecen en pares conjugados. Así, por ejemplo, una ecuación polinomial cúbica puede tener dos raíces complejas cuando mucho.

EJEMPLO 3 **Ecuación diferencial de tercer orden**

Resolver $y''' + 3y'' - 4y = 0$.

SOLUCIÓN Al examinar $m^3 + 3m^2 - 4 = 0$ debemos notar que una de sus raíces es $m_1 = 1$. Si dividimos $m^3 + 3m^2 - 4$ entre m - 1, vemos que

$$m^3 + 3m^2 - 4 = (m - 1)(m^2 + 4m + 4) = (m - 1)(m + 2)^2,$$

y entonces las demás raíces son $m_2 = m_3 = -2$. Así, la solución general es

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 **Ecuación diferencial de cuarto orden**

Resuelva $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es $m^4 + 2m^2 + 1 = (m^2 + 1)^2 = 0$ y tiene las raíces $m_1 = m_3 = i$ y $m_2 = m_4 = -i$. Así, de acuerdo con el caso II, la solución es

$$y = C_1e^{ix} + C_2e^{-ix} + C_3xe^{ix} + C_4xe^{-ix}.$$

Según la fórmula de Euler, se puede escribir el agrupamiento $C_1e^{ix} + C_2e^{-ix}$ en la forma

$$c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

con un cambio de definición de las constantes. Igualmente, $x(C_3e^{ix} + C_4e^{-ix})$ se puede expresar en la forma $x(c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x)$. En consecuencia, la solución general es

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3x \cos x + c_4x \operatorname{sen} x.$$

■

El ejemplo 4 mostró un caso especial en que la ecuación auxiliar tiene raíces complejas repetidas. En general, si $m_1 = \alpha + i\beta$ es una raíz compleja de multiplicidad k de una ecuación auxiliar con coeficientes reales, su raíz conjugada, $m_2 = \alpha - i\beta$, también es una raíz de multiplicidad k. Con base en las $2k$ soluciones complejas

$$e^{(\alpha+i\beta)x},\ xe^{(\alpha+i\beta)x},\ x^2e^{(\alpha+i\beta)x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{(\alpha+i\beta)x}$$
$$e^{(\alpha-i\beta)x},\ xe^{(\alpha-i\beta)x},\ x^2e^{(\alpha-i\beta)x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{(\alpha-i\beta)x}$$

llegamos a la conclusión, con ayuda de la fórmula de Euler, de que la solución general de la ecuación diferencial correspondiente debe contener una combinación lineal de las $2k$ soluciones reales y linealmente independientes

$$e^{\alpha x} \cos \beta x,\quad xe^{\alpha x} \cos \beta x,\quad x^2e^{\alpha x} \cos \beta x,\quad \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x,\quad xe^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x,\quad x^2e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x,\quad \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x.$$

En el ejemplo 4 vemos que, $k = 2$, $\alpha = 0$ y $\beta = 1$.

Naturalmente, el punto más difícil al resolver ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes es la determinación de las raíces de las ecuaciones auxiliares de grado mayor que dos; por ejemplo, para resolver $3y''' + 5y'' + 10y' - 4y = 0$, primero debemos resolver $3m^3 + 5m^2 + 10m - 4 = 0$. Algo que podemos intentar es probar si la ecuación auxiliar tiene raíces racionales. Recordemos que si $m_1 = p/q$ es una raíz racional reducida a su expresión mínima de una ecuación auxiliar $a_nm^n + \ldots + a_1m + a_0 = 0$, con coeficientes enteros, *p es un* factor de a_0 y q es factor de a_n. Para nuestra ecuación auxiliar cúbica, todos los factores de $a_0 = -4$ y $a_n = 3$ sonp: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ y *q:* fl, ± 3, de modo que las raíces racionales posibles son p/q: fl, $\pm 2, \pm 4, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}$ y $\pm\frac{4}{3}$. Entonces se puede probar con cada uno de estos números, por ejemplo, con división sintética. Así se descubren, a la vez, la raíz $m_1 = \frac{1}{3}$ y la factorización

$$3m^3 + 5m^2 + 10m - 4 = \left(m - \frac{1}{3}\right)(3m^2 + 6m + 12).$$

Con ello la fórmula cuadrática produce las demás raíces, $m_2 = -1 + \sqrt{3}\,i$ y $m_3 = -1 - \sqrt{3}\,i$. Entonces, la solución general de $3y''' + 5y'' + 10y' - 4y = 0$ es

$$y = c_1 e^{x/3} + e^{-x}(c_2 \cos \sqrt{3}x + c_3 \operatorname{sen} \sqrt{3}x).$$

Empleo de computadoras Cuando se cuenta con una calculadora o un programa de computación adecuados, la determinación o aproximación de las raíces de ecuaciones polinomiales se convierte en un asunto rutinario. Los sistemas algebraicos de computación, como Mathematica y Maple, pueden resolver ecuaciones polinomiales (en una variable) de grado menor de cinco mediante fórmulas algebraicas. Para la ecuación auxiliar del párrafo anterior, los comandos

```
Solve[3 m^3 + 5 m^2 + 10 m - 4 == 0, m]      (en Mathematica)
solve(3*m^3 + 5*m^2 + 10*m - 4, m);          (en Maple)
```

dan, como resultado inmediato, sus representaciones de las raíces $\frac{1}{3}$, $-1 + \sqrt{3}\,i$, $-1 - \sqrt{3}\,i$. Cuando las ecuaciones auxiliares son de orden mayor, quizá se requieran comandos numéricos, como **NSolve** y **FindRoot** en Mathematica. Por su capacidad de resolver ecuaciones polinomiales, no nos debe sorprender que algunos sistemas algebraicos de computación también son capaces de presentar soluciones explícitas de ecuaciones diferenciales lineales, homogéneas y de coeficientes constantes; por ejemplo, al teclear

```
DSolve [y''[x] + 2 y'[x] + 2 y[x] == 0, y[x], x]                    (en Mathematica)
dsolve(diff(y(x),x$2) + 2*diff(y(x),x) +2*y(x) = 0, y(x)); (en Maple)
```

se obtiene, respectivamente

$$y[x] \to \frac{C[2]\cos[x] - C[1]\operatorname{Sen}[x]}{E^x}$$

Y

$$y(x) = \_C1 \exp(-x)\operatorname{sen}(x) + \_C2 \exp(-x)\cos(x)$$

Las expresiones anteriores quieren decir que $y = c_2 e^{-x} \cos x + c_1 e^{-x} \operatorname{sen} x$ es una solución de $y'' + 5 + 2y = 0$. Obsérvese que el signo menos frente a C[1] en el primer resultado es superfluo. ¿Por qué?

En el texto clásico *Differential Equations*, de Ralph Palmer Agnew,* que usó el autor de estudiante, se afirma que:

> No es razonable esperar que los alumnos de este curso tengan la destreza y el equipo computacional necesarios para resolver con eficiencia ecuaciones como

$$4.317\frac{d^4y}{dx^4} + 2.179\frac{d^3y}{dx^3} + 1.416\frac{d^2y}{dx^2} + 1.295\frac{dy}{dx} + 3.169y = 0. \qquad (13)$$

Aunque se puede discutir si la destreza en computación ha mejorado en todos estos años o no, el equipo sí es mejor. Si se tiene acceso a un sistema algebraico computacional, se puede

*McGraw-Hill, New York, 1960.

considerar que la ecuación (13) es razonable. Después de simplificar y efectuar algunas sustituciones en los resultados, con Mathematica se obtiene la siguiente solución general (aproximada);

$$y = c_1e^{-0.728852x}\cos(0.618605x) + c_2e^{-0.728852x}\operatorname{sen}(0.618605x) + c_3e^{0.476478x}\cos(0.759081x) + c_4e^{0.476478x}\operatorname{sen}(0.759081x).$$

De paso haremos notar que los comandos **DSolve** y **dsolve,** en Mathematica y Maple, al igual que la mayor parte de los aspectos de cualquier sistema algebraico computacional, tienen sus limitaciones.

EJERCICIOS 4.3

En los problemas 1 a 36 determine la solución general de cada ecuación diferencial.

1. $4y'' + y' = 0$
2. $2y'' - 5y' = 0$
3. $y'' - 36y = 0$
4. $y'' - 8y = 0$
5. $y'' + 9y = 0$
6. $3y'' + y = 0$
7. $y'' - y' - 6y = 0$
8. $y'' - 3y' + 2y = 0$
9. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 8\dfrac{dy}{dx} + 16y = 0$
10. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 10\dfrac{dy}{dx} + 25y = 0$
11. $y'' + 3y' - 5y = 0$
12. $y'' + 4y' - y = 0$
13. $12y'' - 5y' - 2y = 0$
14. $8y'' + 2y' - y = 0$
15. $y'' - 4y' + 5y = 0$
16. $2y'' - 3y' + 4y = 0$
17. $3y'' + 2y' + y = 0$
18. $2y'' + 2y' + y = 0$
19. $y''' - 4y'' - 5y' = 0$
20. $4y''' + 4y'' + y' = 0$
21. $y''' - y = 0$
22. $y''' + 5y'' = 0$
23. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$
24. $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$
25. $y''' + y'' - 2y = 0$
26. $y''' - y'' - 4y = 0$
27. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$
28. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$
29. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + \dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$
30. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$
31. $16\dfrac{d^4y}{dx^4} + 24\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$
32. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 7\dfrac{d^2y}{dx^2} - 18y = 0$
33. $\dfrac{d^5y}{dx^5} - 16\dfrac{dy}{dx} = 0$
34. $\dfrac{d^5y}{dx^5} - 2\dfrac{d^4y}{dx^4} + 17\dfrac{d^3y}{dx^3} = 0$
35. $\dfrac{d^5y}{dx^5} + 5\dfrac{d^4y}{dx^4} - 2\dfrac{d^3y}{dx^3} - 10\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$
36. $2\dfrac{d^5y}{dx^5} - 7\dfrac{d^4y}{dx^4} + 12\dfrac{d^3y}{dx^3} + 8\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$

En los problemas 37 a 52 resuelva cada ecuación diferencial, sujeta a las condiciones iniciales indicadas.

37. y" + 16y = 0, y(0) = 2, y'(O) = -2
38. y" − y = 0, y(0) = y'(O) = 1
39. y" + 6y' + 5y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 3
40. y" − 8y' + 17y = 0, y(0) = 4, y'(0) = −1
41. 2y" − 2y' + y = 0, y(0) = -1, y'(O) = 0
42. y" − 2y' + y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 10
43. y" + y' + 2y = 0, y(0) = y'(O) = 0
44. 4y" − 4y' − 3y = 0, y(0) = 1, y'(O) = 5
45. y" 3y' + 2y = 0, y(l) = 0, y'(l) = 1
46. $y'' + y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$
47. y"' + 12y" + 36y' = 0, y(0) = 0, y'(O) = 1, y"(0) = -7
48. y"' + 2y" − 5y' − 6y = 0, y(0) = y'(O) = 0, y"(0) = 1
49. y''' − 8y = 0, y(0) = 0, y'(O) = −1, y"(0) = 0
50. $\frac{d^4y}{dx^4} = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 3, y''(0) = 4, y'''(0) = 5$
51. $\frac{d^4y}{dx^4} - 3\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0, \quad y(0) = y'(O) = 0, y''(0) = y''(O) = 1$
52. $\frac{d^4y}{dx^4} - y = 0, \quad y(0) = y'(O) = y''(O) = 0, y'''(O) = 1$

En los problemas 53 a 56 resuelva la ecuación diferencial respectiva, sujeta a las condiciones iniciales señaladas.

53. y" − 10y' + 25y = 0, y(0) = 1, y(1) = 0
54. y" + 4y = 0, y(0) = 0, y(π) = 0
55. $y'' + y = 0, \quad y'(O) = 0, y'\frac{\pi}{2} = 2$
56. y" − y = 0, y(0) = 1, y'(l) = 0

En la solución de los problemas 57 a 60 use una computadora para resolver la ecuación auxiliar o para obtener directamente la solución general de la ecuación diferencial dada. Si usa un sistema algebraico de computación (SAC) para llegar a la solución general, simplifique el resultado y escriba la solución en términos de funciones reales.

57. y''' − 6y" + 2y' + y = 0
58. 6.11y''' + 8.59y" + 7.93y' + 0.778y = 0
59. $3.15y^{(4)} - 5.34y'' + 6.33y' - 2.03y = 0$
60. $y^{(4)} + 2y'' - y + 2y = 0$

Problemas para discusión

61. **a)** Las raíces de una ecuación auxiliar cuadrática son $m_1 = 4$ y $m_2 = -5$. ¿Cuál es la ecuación diferencial lineal homogénea correspondiente?

    b) Dos raíces de una ecuación auxiliar cúbica, con coeficientes reales, son $m_1 = -\frac{1}{2}$ y $m_2 = 3 + i$. ¿Cuál es la ecuación diferencial lineal homogénea correspondiente?

    c) $y_1 = e^{-4x}\cos x$ es una solución de $y''' + 6y'' + y' - 34y = 0$. ¿Cuál es la solución general de la ecuación diferencial?

62. ¿Qué condiciones deben llenar los coeficientes constantes a, b y c para garantizar que todas las soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden $uy'' + by' + cy = 0$ sean acotadas en el intervalo $[0, \infty)$?

63. Describa cómo la ecuación diferencial $xy'' + y' + xy = 0$ (o sea, $y'' + (1/x)y' + y = 0$), para $x > 0$ nos permite discernir el comportamiento cualitativo de las soluciones cuando $x \to \infty$. Compruebe sus conjeturas con un *ODE solver*.

4.4 COEFICIENTES INDETERMINADOS, MÉTODO DE LA SUPERPOSICIÓN

■ *Solución general para una ecuación diferencial lineal no homogénea* ■ *Forma de una solución particular* ■ *Principio de superposición para ecuaciones diferenciales no homogéneas* ■ *Casos para aplicar coeficientes indeterminados*

Nota para el profesor En esta sección se desarrolla el método de los coeficientes indeterminados a partir del principio de superposición para ecuaciones diferenciales no homogéneas (teorema 4.7). En la sección 4.5 presentaremos un método totalmente distinto, donde se utiliza el concepto de operadores diferenciales anuladores. Haga su elección.

Para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x) \tag{1}$$

debemos pasar por dos etapas:

i) Determinar la función complementaria, y_c.
ii) Establecer *cualquier* solución particular, y_p, de la ecuación no homogénea.

Entonces, como vimos en la sección 4.1, la solución general de (1) en un intervalo es $y = y_c + y_p$.

La función complementaria y_c es la solución general de la ecuación homogénea asociada $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$. En la última sección vimos cómo resolver estas ecuaciones cuando los coeficientes son constantes. El primero de dos métodos que debemos considerar para obtener una solución particular, y_p, se llama **método de los coeficientes indeterminados.** La idea básica es una conjetura o propuesta coherente acerca de la forma de y_p originada por los tipos de funciones que forman el dato g(x). El método es básicamente directo, pero está limitado a ecuaciones lineales no homogéneas, como la ecuación (1), en que

- Los coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes
- g(x) es una constante k, una función polinomial, una función exponencial $e^{\alpha x}$, funciones seno o coseno como sen βx, cos βx, o sumas y productos finitos de esas funciones.

Nota

En términos estrictos, $g(x) = k$ (una constante) es una función polinomial. Como es probable que una función constante no sea lo primero que se viene a la mente con el concepto de funciones polinomiales, en lo sucesivo, para recordar citaremos la **redundancia** "funciones constantes, polinomios . . "

A continuación veremos algunos ejemplos de las clases de funciones g(x) adecuadas para nuestra descripción:

$$\text{g(x)} = 10,\ \text{g(x)} = x^2 - 5x,\ \text{g(x)} = 15x - 6 + 8e^{-x},$$
$$\text{g(x)} = \text{sen } 3x - 5x \cos 2x,\quad \text{g(x)} = e^x \cos x + (3x^2 - 1)e^{-x},$$

etc.: esto es, g(x) es **una** combinación lineal de funciones del tipo

$$k \text{ (constante)},\ x^n,\ x^n e^{\alpha x},\ x^n e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{y} \quad x^n e^{\alpha x} \text{ sen } \beta x,$$

en donde n es un entero no negativo y α y β son números reales. El método de los coeficientes indeterminados no se aplica a ecuaciones de la forma (1) cuando

$$\text{g(x)} = \ln x,\quad \text{g(x)} = \frac{1}{x},\quad \text{g(x)} = \tan x,\quad \text{g(x)} = \text{sen}^{-1} x,$$

etc. En la sección 4.6 se trataran ecuaciones diferenciales en que la "entrada" (input) de la ecuación, g(x), sea una función como estas últimas.

El conjunto de funciones formado por constantes, polinomios, exponenciales $e^{\alpha x}$, senos y cosenos tiene la notable propiedad de que las derivadas de sus sumas y productosson, de nuevo, sumas y productos de constantes, polinomios, exponenciales $e^{\alpha x}$, senos y cosenos. Como la **combinación** lineal de las derivadas $a_n y_p^{(n)} + a_{n-1} y_p^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_p' + a_0 y_p$ debe ser idéntica a g(x), parece lógico suponer que y_p *tiene la misma forma que g(x).*

Ilustraremos el **método** básico con dos ejemplos.

EJEMPLO 1 **Solución general con coeficientes indeterminados**

Resolver $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$ **(2)**

SOLUCIÓN **Paso** 1. Primero resolveremos la ecuación homogénea asociada $y'' + 4y' - 2y = 0$. Al aplicar la fórmula cuadrática tenemos que las raíces de la ecuación auxiliar $m_2 + 4m - 2 = 0$ son $m_1 = -2 - \sqrt{6}$ y $m_2 = -2 + \sqrt{6}$. Entonces, la función complementaria es

$$y_c = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}.$$

Paso 2. Como la función g(x) es un polinomio cuadrático, supondremos una solución particular que también tenga la forma de un polinomio **cuadrático:**

$$y_p = Ax^2 + Bx + C.$$

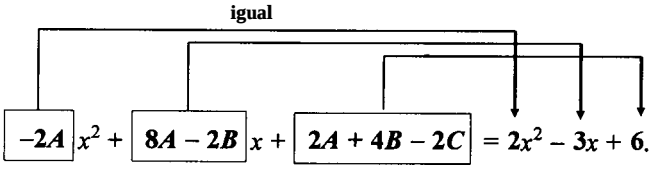
Tratamos de determinar coeficientes A, B y C *específicos* para los que y_p sea una solución de (2). Sustituimos y_p y las derivadas

$$y_p' = 2Ax + B \qquad y \qquad y_p'' = 2A$$

en la ecuación diferencial dada, la ecuación (2), y obtenemos

$$\begin{aligned} y_p'' + 4y_p' - 2y_p &= 2A + 8Ax + 4B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C \\ &= 2x^2 - 3x + 6. \end{aligned}$$

Como se supone que esta ecuación es una identidad, los coeficientes de potencias de x de igual grado deben ser iguales:



Esto es,

$$-2A = 2, \qquad 8A - 2B = -3, \qquad 2A + 4B - 2C = 6.$$

Al resolver este sistema de ecuaciones se obtienen $A = -1$, $B = -\frac{5}{2}$ y $C = -9$. Así, una solución particular es

$$y_p = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$$

Paso 3. La solución general de la ecuación dada es

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 **Solución particular mediante coeficientes indeterminados**

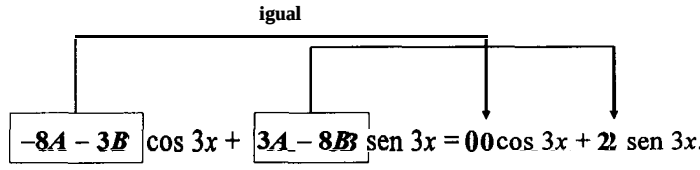
Determine una solución particular de $y'' - y' + y = 2 \operatorname{sen} 3x$.

SOLUCIÓN Una primera estimación lógica de una solución particular sería $A \operatorname{sen} 3x$; pero como las diferenciaciones sucesivas de sen $3x$ dan sen $3x$ y *también* cos $3x$, tenemos que suponer una solución particular que posea ambos términos:

$$y_p = A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x.$$

Al diferenciar y_p, sustituir los resultados en la ecuación diferencial original y reagrupar, tenemos

$$y_p'' - y_p' + y_p = (-8A - 3B) \cos 3x + (3A - 8B) \operatorname{sen} 3x = 2 \operatorname{sen} 3x$$



Del sistema

$$-8A - 3B = 0, \qquad 3A - 8B = 2,$$

obtenemos $A = \frac{6}{73}$ y $B = -\frac{16}{73}$. Una solución particular de la ecuación es

$$y_p = \frac{6}{73}\cos 3x - \frac{16}{73}\operatorname{sen} 3x.$$

■

Como ya mencionamos, la forma que supongamos para la solución particular y_p es una estimación coherente, no a ciegas. Dicha estimación ha de tener en cuenta no sólo los tipos de funciones que forman a g(x), sino (como veremos en el ejemplo **4),** las funciones que forman la función complementaria y_c.

EJEMPLO 3 **Formación de y_p por superposición**

Resuelva $y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}$. *(3)*

SOLUCIÓN Paso 1. Primero se determina la solución de la ecuación homogénea asociada, $y'' - 2y' - 3y = 0$, solución que es $y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$.

Paso 2. A continuación, la aparición de $4x - 5$ en g(x) sugiere que la solución particular contiene un polinomio lineal. Además, como la derivada del producto xe^{2x} produce $2xe^{2x}$ y e^{2x}, también supondremos que en la solución particular hay términos en xe^{2x} y en e"; en otras palabras, g es la suma de dos tipos básicos de funciones:

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) = \textbf{polinomio} + \textbf{exponenciales}.$$

En consecuencia, el principio de superposición para ecuaciones no homogéneas (teorema 4.7) sugiere que busquemos una solución particular

$$y_P = y_{p_1} + y_{p_2},$$

donde $y_{p_1} = Ax + B$ y $y_{p_2} = Cxe^{2x} + Ee^{2x}$. Sustituimos:

$$y_p = Ax + B + Cxe^{2x} + Ee^{2x}$$

en la ecuación dada (3) y agrupamos los términos semejantes:

$$y_p'' - 2y_p' - 3y_p = -3Ax - 2A - 3B - 3Cxe^{2x} + (2C - 3E)e^{2x} = 4x - 5 + 6xe^{2x}. \quad (4)$$

De esta identidad se obtienen cuatro ecuaciones:

$$-3A = 4, \quad -2A - 3B = -5, \quad -3C = 6, \quad 2C - 3E = 0.$$

La ultima ecuación del sistema proviene de la interpretación de que el coeficiente de e^{2x} en el lado derecho de (4) es cero. Al resolver el sistema llegamos a $A = -\frac{4}{3}$, $B = \frac{23}{9}$, $C = -2$ y $E = -\frac{4}{3}$. En consecuencia,

$$y_p = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}.$$

Paso 3. La solución general de la ecuación es

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} - \frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - \left(2x + \frac{4}{3}\right)e^{2x}. \quad \blacksquare$$

De acuerdo con el principio de superposición, teorema 4.7, también podemos atacar al ejemplo 3 resolviendo dos problemas más sencillos. El lector debe comprobar que al sustituir

$$y_{p_1} = Ax + B \qquad \text{en } y'' - 2y' - 3y = 4x - 5$$

Y

$$y_{p_2} = Cxe^{2x} + Ee^{2x} \quad \text{en} \quad y'' - 2y' - 3y = 6xe^{2x}$$

se tiene, $y_{p_1} = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9}$ y $y_{p_2} = -(2x + \frac{4}{3})e^{2x}$. Entonces, una solución particular de la ecuación (3) es $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$.

En el próximo ejemplo veremos que, a veces, la hipótesis "obvia" de la forma de y_p no es una conjetura correcta.

EJEMPLO 4 **Un tropiezo del método**

Determine una solución particular dey" - 5y' + 4y = $8e^x$.

SOLUCIÓN Al derivar e^x no se obtienen funciones nuevas. Así, si procedemos como en los ejemplos anteriores, es lógico suponer una solución particular de la forma $y_p = Ae^x$. Pero al sustituir esta expresión en la ecuación diferencial obtenemos la afirmación contradictoria

$$0 = 8e^x,$$

y vemos que nuestra hipótesis de y_p fue incorrecta.

Aquí, la dificultad se aclara al examinar la función complementaria $y_c = c_1e^x + c_2e^{4x}$. Vemos que la supuesta Ae^x ya está presente en y_c. Esto quiere decir que e^x es una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada, y al sustituir un múltiplo constante Ae^x en la ecuación diferencial se obtendra, necesariamente, cero.

¿Entonces, cuál debe ser la forma dey,? Siguiendo el caso II de la sección 4.3, veamos si podemos tener una solución particular de la forma

$$y_p = Axe^x.$$

Sustituimos $y'_p = Axe^x + Ae^x$ y $y''_p = Axe^x + 2Ae^x$ en la ecuación diferencial, simplificamos y obtenemos

$$y''_p - 5y'_p + 4y_p = -3Ae^x = 8e^x.$$

En esta ecuación vemos que el valor de A es $A = -\frac{8}{3}$; por consiguiente, una solución particular de la ecuación dada es

$$y_p = -\frac{8}{3}xe^x. \quad \blacksquare$$

La diferencia entre los procedimientos que empleamos en los ejemplos 1 a 3 y 4 nos lleva a considerar dos casos. El primero refleja lo que sucede en los ejemplos 1 a 3.

CASO I: Ninguna función en la solución particular supuesta es una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada.

En la tabla 4.1 mostramos algunos ejemplos específicos de g(x) en (1), con la forma correspondiente de la solución particular. Naturalmente, suponemos que ninguna función, en la solución particular y_p supuesta está duplicada (o reproducida) por una función en la solución complementaria y_c.

TABLA 4.1 Soluciones particulares tentativas

$g(x)$	Forma de y_p
1. 1 (una constante)	A
2. $5x + 7$	$Ax + B$
3. $3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
4. $x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + E$
5. sen $4x$	$A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x$
6. $\cos 4x$	$A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x$
7. e^{5x}	Ae^{5x}
8. $(9x - 2)\, e^{5x}$	$(Ax + B)\, e^{5x}$
9. x^2e^{5x}	$(Ax^2 + Bx + C)\, e^{5x}$
10 $e^{3x} \operatorname{sen} 4x$	$Ae^{3x} \cos 4x + Be^{3x} \operatorname{sen} 4x$
11. $5x^2 \operatorname{sen} 4x$	$(Ax^2 + Bx + C) \cos 4x + (Ex^2 + Fx + G) \operatorname{sen} 4x$
12. $xe^{3x} \cos 4x$	$(Ax + B)\, e^{3x} \cos 4x + (Cx + E)\, e^{3x} \operatorname{sen} 4x$

EJEMPLO 5 Formas de soluciones particulares, caso I

Determine la forma de una solución particular de

(a) $y'' - 8y' + 25y = 5x^3e^{-x} - 7e^{-x}$ (b) $y'' + 4y = x \cos x$

SOLUCIÓN a) Podemos escribir g(x) = $(5x^3 - 7)e^{-x}$. Tomamos nuestro modelo del renglón 9 de la tabla 4.1, y suponemos que una solución particular tiene la forma

$$y_p = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + E)e^{-x}.$$

Obsérvese que no hay duplicación entre los términos dey,, y los de la función complementaria $y_c = e^{4x}(c_1 \cos 3x + c_2 \text{ sen } 3x)$.

b) La función g(x) = x cos x se parece a la del renglón ll de la tabla 4.1 excepto que usamos un polinomio lineal y no cuadrático, y cos x y sen x en lugar de cos $4x$ y sen $4x$, en la forma dey,:

$$y_p = (Ax + B) \cos x + (Cx + E) \text{ sen } x.$$

Nótese que no hay duplicación de términos entre y_p y $y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \text{ sen } 2x$. ■

Si g(x) está formada por una suma de, digamos, m términos del tipo de los de la tabla, entonces, como en el ejemplo 3, la hipótesis de una solución particular y_p consiste en la suma de las formas tentativas $y_{p_1}, y_{p_2}, \ldots, y_{p_m}$ que corresponden a los términos

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_m}.$$

Lo que acabamos de decir se puede formular también como

Regla de formación para el caso I La forma dey,, es una combinación lineal de todas las funciones linealmente independientes generadas por diferenciaciones repetidas de g(x).

EJEMPLO 6 **Formación de y_p por superposición, caso I**

Determine la forma de una solución particular de

$$y'' - 9y' + 14y = 3x^2 - 5 \text{ sen } 2x + 7xe^{6x}.$$

SOLUCIÓN

Suponemos que $3x^2$ corresponde a $y_{p_1} = Ax^2 + Bx + C.$

Suponemos que -5 sen $2x$ corresponde a $y_{p_2} = E \cos 2x + F \text{ sen } 2x.$

Suponemos que $7xe^{6x}$ corresponde a $y_{p_3} = (Gx + H)e^{6x}.$

Entonces, la propuesta de solución particular es

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} = Ax^2 + Bx + C + E \cos 2x + F \text{sen} 2x + (Gx + H)e^{6x}.$$

Ningún término de esta propuesta repite, o duplica, un término de $y_c = c_1e^{2x} + c_2e^{7x}$. ■

CASO II: Una función en la solución particular supuesta también es una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada.

El ejemplo que sigue se parece al 4.

EJEMPLO 7 **Solución particular, caso II**

Determine una solución particular de $y'' - 2y' + y = e^x$.

SOLUCIÓN La solución complementaria es $y_c = c_1e^x + c_2xe^x$. Al igual que en el ejemplo 4, la hipótesis $y_p = Ae^x$ no dará resultado porque se ve, en y_c, que e^x es una solución de la ecuación homogénea asociada $y'' - 2y' + y = 0$. Además, no podremos determinar una solución particular de la forma $y_p = Axe^x$, ya que el término xe^x también está duplicado en y_c. Probaremos a continuación con

$$y_p = Ax^2e^x.$$

Al sustituir en la ecuación diferencial dada se obtiene

$$2Ae^x = e^x, \qquad \text{de modo que} \qquad A = \frac{1}{2}.$$

Entonces, una solución particular es $y_p = \frac{1}{2}x^2e^x$. ■

Supongamos de nuevo que g(x) está formada por m términos de los tipos que aparecen en la tabla 4.1 y que la hipótesis normal de una solución particular es

$$YP = YP, + YP, + '' . + YP_m,$$

en donde las y_{p_i}, $i = 1, 2, \ldots, m$ son formas tentativas de solución particular que corresponden a esos términos. En las condiciones descritas en el caso II podemos establecer la siguiente regla general:

Regla de multiplicación para el caso II Si alguna y_{p_i} contiene términos que duplican los términos en y_c, entonces y_{p_i} se debe multiplicar por x^n, donde n es el entero positivo mínimo que elimina esa duplicación.

EJEMPLO 8 **Un problema de valores iniciales**

Resuelva el problema de valores iniciales

$$y'' + y = 4x + 10 \operatorname{sen} x, \qquad y(\pi) = 0,\ y'(n) = 2.$$

SOLUCIÓN La solución de la ecuación homogénea asociada, $y'' + y = 0$, es $y_c = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$. Como $g(x) = 4x + 10 \operatorname{sen} x$ es la suma de un polinomio lineal y una función senoidal, nuestra tentativa lógica de y_p, según los renglones 2 y 5 de la tabla 4.1, sería la suma de $y_{p_1} = Ax + B$ y $y_{p_2} = C \cos x + E \operatorname{sen} x$:

$$y_p = Ax + B + Ccosx + \text{Esenx}. \tag{5}$$

Pero hay una duplicación obvia en los términos $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ en esta forma tentativa y dos términos de la función complementaria. Podemos eliminar esta repetición con sólo multiplicar y_{p_2} por x. En lugar de la ecuación (5) usaremos ahora

$$y_p = Ax + B + Cxcosx + Exsenx. \tag{6}$$

Al derivar esta expresión y sustituir los resultados en la ecuación diferencial se obtiene

$$y_p'' + y_p = Ax + B \quad 2C\text{sen}x + 2E\cos x = 4x + 10\text{sen}\, x,$$

y así

$$A = 4, \quad B = 0, \quad -2C = 10, \quad 2E = 0.$$

Las soluciones del sistema se ven de inmediato: $A = 4$, $B = 0$, $C = -5$ y $E = 0$. Entonces, de acuerdo con (6), obtenemos $y_p = 4x - 5x \cos x$. La solución general de la ecuación dada es

$$y = y_c + y_p = c_1 \cos x + c_2 \text{sen}\, x + 4x - 5x \cos x.$$

Ahora aplicaremos las condiciones iniciales a la solución general de la ecuación. Primero, $y(\pi) = c_1 \cos \pi + c_2 \text{sen}\, \pi + 4\pi - 5\pi \cos \pi = 0$ da $c_1 = 9\pi$, porque $\cos \pi = -1$ y $\text{sen}\, \pi = 0$. A continuación, a partir de la derivada

$$y' = -9\text{rrsen}x + c_2 \cos x + 4 + 5x\text{sen}x - 5\cos x$$

y

$$y'(\pi) = -9\pi \text{sen}\, \pi + c_2 \cos \pi + 4 + 5\pi \text{sen}\, \pi - 5\cos \pi = 2$$

llegamos a $c_2 = 7$. La solución del problema de valor inicial es

$$y = 9\pi \cos x + 7 \text{ sen } x + 4x - 5x \cos x. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 9 **Empleo de la regla de multiplicación**

Resuelva $y'' - 6y' + 9y = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}$.

SOLUCIÓN La función complementaria es $y_c = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$. Entonces, basándonos en los renglones 3 y 7 de la tabla 4.1, la hipótesis normal de una solución particular sería

$$y_p = \underbrace{Ax^2 + Bx + C}_{y_{p_1}} + \underbrace{Ee^{3x}}_{y_{p_2}}.$$

Al revisar estas funciones vemos que un término de y_{p_2} está repetido en y_c. Si multiplicamos y_{p_2} por x el término xe^{3x} sigue siendo parte de y_c. Pero si multiplicamos y_{p_2} por x^2 se eliminan todas las duplicaciones. Así, la forma operativa de una solución particular es

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + Ex^2 e^{3x}.$$

Si derivamos esta forma, sustituimos en la ecuación diferencial y reunimos los términos semejantes, llegamos a

$$y_p'' - 6y_p' + 9y_p = 9Ax^2 + (-12A + 9B)x + 2A - 6B + 9C + 2Ee^{3x} = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}.$$

De acuerdo con esta identidad, $A = \frac{2}{3}$, $B = \frac{8}{9}$, $C = \frac{2}{3}$ y $E = -6$.
Por lo tanto, la solución general $y = y_c + y_p$, es

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{2}{3} - 6x^2 e^{3x}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 10 **Ecuación diferencial de tercer orden, caso I**

Resuelva $y''' + y'' = e^x \cos x$.

SOLUCIÓN Partimos de la ecuación característica $m^3 + m^2 = 0$ y vemos que $m_1 = m_2 = 0$, y $m_3 = -1$. Entonces, la función complementaria de la ecuación es $y_c = c_1 + c_2x + c_3e^{-x}$. Si $g(x) = e^x \cos x$, de acuerdo con el renglón 10 de la tabla 4.1, deberíamos suponer

$$y_p = Ae^x \cos x + Be^x \operatorname{sen} x.$$

Como no hay funciones en y_p que repiten las funciones de la solución complementaria, procederemos normalmente. Partimos de

$$y_p''' + y_p'' = (-2A + 4B)e^x \cos x + (-4A - 2B)e^x \operatorname{sen} x = e^x \cos x$$

y obtenemos $$-2A + 4B = 1, \qquad -4A - 2B = 0.$$

Con este sistema tenemos $A = -\frac{1}{10}$ y $B = \frac{1}{5}$, de tal suerte que una solución particular es $y_p = -\frac{1}{10}e^x \cos x + \frac{1}{5}e^x \operatorname{sen} x$. La solución general de la ecuación es

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} - \frac{1}{10}e^x \cos x + \frac{1}{5}e^x \operatorname{sen} x. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 11 **Ecuación diferencial de cuarto orden, caso II**

Determine la forma de una solución particular de $y^{(4)} + y''' = 1 - x^2e^{-x}$.

SOLUCIÓN Comparamos $y_c = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x}$ con nuestra tentativa normal de solución particular

$$y_p = \underbrace{A}_{y_{p_1}} + \underbrace{Bx^2e^{-x} + Cxe^{-x} + Ee^{-x}}_{y_{p_2}},$$

vemos que se eliminan las duplicaciones entre y_c y y_p cuando se multiplica y_{p_1} por x^3 y y_{p_2} por x. Así, la hipótesis correcta de una solución particular es

$$y_p = Ax^3 + Bx^3e^{-x} + Cx^2e^{-x} + Exe^{-x}. \quad \blacksquare$$

Observación

En los problemas 27 a 36 de los ejercicios 4.4 se pide al lector **resolver** problemas de valores iniciales, y los problemas 37 y 38 son de valores en la frontera. Según se expuso en el ejemplo 8, el lector se debe asegurar de aplicar las condiciones iniciales (o las condiciones en la frontera) a la solución general $y = y_c + y_p$. Con frecuencia se cae en el error de aplicar esas condiciones **sólo** a la función complementaria y_c porque es la parte de la solución donde aparecen las constantes.

EJERCICIOS 4.4

En los problemas 1 a 26 resuelva las ecuaciones diferenciales por coeficientes indeterminados.

1. $y'' + 3y' + 2y = 6$
2. $4y'' + 9y = 15$
3. $y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$
4. $y'' + y' - 6y = 2x$
5. $\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - 2x$
6. $y'' - 8y' + 20y = 100x^2 - 26xe^x$
7. $y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$
8. $4y'' - 4y' - 3y = \cos 2x$
9. $y'' - y' = -3$
10. $y'' + 2y' = 2x + 5 - e^{-2x}$
11. $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 3 + e^{x/2}$
12. $y'' - 16y = 2e^{4x}$
13. $y'' + 4y = 3 \operatorname{sen} 2x$
14. $y'' + 4y = (x^2 - 3) \operatorname{sen} 2x$
15. $y'' + y = 2x \operatorname{sen} x$
16. $y'' - 5y' = 2x^3 - 4x^2 - x + 6$
17. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$
18. $y'' - 2y' + 2y = e^{2x}(\cos x - 3 \operatorname{sen} x)$
19. $y'' + 2y' + y = \operatorname{sen} x + 3 \cos 2x$
20. $y'' + 2y' - 24y = 16 (x + 2)e^{4x}$
21. $y''' - 6y'' = 3 - \cos x$
22. $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 6xe^{2x}$
23. $y''' - 3y'' + 3y' - y = x 4e^x$
24. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 5 - e^x + e^{2x}$
25. $y^{(4)} + 2y'' + y = (x - 1)^2$
26. $y^{(4)} - y'' = 4x + 2xe^{-x}$

En los problemas 27 a 36, resuelva la ecuación diferencial respectiva, sujeta a las condiciones iniciales indicadas.

27. $y'' + 4y = -2, \quad y\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}, y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2$
28. $2y'' + 3y' - 2y = 14x^2 - 4x - 11, y(0) = 0, y'(0) = 0$
29. $5y'' + y' = -6x, \; y(0) = 0, \; y'(0) = -10$
30. $y'' + 4y' + 4y = (3 + x)e^{-2x}, \quad y(0) = 2, y'(0) = 5$
31. $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}, \; y(0) = -3, \; y'(0) = 1$
32. $y'' - y = \cosh x; y(0) = 2, \; y'(0) = 12$
33. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen} \omega t, \quad x(0) = 0, x'(0) = 0$
34. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \cos \gamma t, \quad x(0) = 0, \; x'(0) = 0$

35. $y''' - 2y'' + y' = 2 - 24e^{x} + 40e^{5x}, \quad y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = \frac{5}{2}, y''(0) = -\frac{9}{2}$

36. $y''' + 8y = 2x - 5 + 8e^{-2x}, \quad y(0) = -5, y'(0) = 3, y''(0) = -4$

En los problemas 37 y 38, resuelva la ecuación diferencial sujeta a las condiciones en la frontera indicadas.

37. $y'' + y = x^2 + 1, \quad y(0) = 5, y(1) = 0$

38. $y'' - 2y' + 2y = 2x - 2, \quad y(0) = 0, y(\pi) = \pi$

39. Muchas veces, la función g(x) es discontinua en las aplicaciones. Resuelva el problema de valores iniciales

$$y'' + 4y = g(x), \quad y(0) = 1, y'(0) = 2,$$

en donde

$$g(x) = \begin{cases} \text{sen}x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

[Sugerencia: resuelva el problema en los dos intervalos y después determine una solución tal que y y y' sean continuas en $x = \pi/2$.]

Problemas para discusión

40. a) Describa cómo resolver la ecuación $ay'' + by' = g(x)$ de segundo orden *sin* ayudarse con coeficientes indeterminados. Suponga que g(x) es continua. También tenga en cuenta que

$$ay'' + by' = \frac{d}{dx}(ay' + by).$$

b) Como ejemplo de su método, resuelva $y'' + y' = 2x - e^{-x}$.

c) Describa cuando se puede aplicar el método de la parte a) a las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de orden mayor que dos.

41. Describa cómo se puede emplear el método de esta sección para determinar una solución particular de $y'' + y = \text{sen } x \cos 2x$. Ponga en práctica su idea.

4.5 COEFICIENTES INDETERMINADOS, MÉTODO DEL ANULADOR

■ *Factorización de un operador diferencial* ■ *Operador anulador*
■ *Determinación de la forma de una solución particular* ■ *Coeficientes indeterminados*

En la sección 4.1 planteamos que una ecuación diferencial lineal de orden n se puede escribir como sigue:

$$a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \cdots + a_1 Dy + a_0 y = g(x), \quad \textbf{(1)}$$

en donde $D^k y = d^k y/dx^k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Cuando nos convenga, representaremos también esta ecuación en la forma $L(x) = g(x)$, donde L representa el operador diferencial lineal de orden n:

$$L = a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0. \tag{2}$$

La notación de operadores es más que taquigrafía útil; en un nivel muy práctico, la *aplicación* de los operadores diferenciales nos permite llegar a una solución particular de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas. Antes de hacerlo, necesitamos examinar dos concepto%:

Factorización de operadores Cuando las a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes reales, se puede *factorizar* un operador diferencial lineal (2) siempre que se factorice el polinomio característico $a_n m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \ldots + a_1 m + a_0$. En otras palabras, si r_1 es una raíz de la ecuación

$$a_n m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0 = 0,$$

entonces $L = (D - r_1)P(D)$, donde la expresión polinomial P(D) es un operador diferencial lineal de orden $n - 1$; por ejemplo, si manejamos D como una cantidad algebraica, el operador $D^2 + 5D + 6$ se puede factorizar como $(D + 2)(D + 3)$ o bien $(D + 3)(D + 2)$. Así, si una función $y = f(x)$ tiene segunda derivada,

$$(D^2 + 5D + 6)y = (D + 2)(D + 3)y = (D + 3)(D + 2)y.$$

Lo anterior es un ejemplo de una propiedad general:

Los factores de un operador diferencial lineal con coeficientes constantes son conmutativos.

Una ecuación diferencial como $y'' + 4y' + 4y = 0$ se puede escribir en la forma

$$(D^2 + 4D + 4)y = 0 \text{ o sea } (D + 2)(D + 2)y = 0 \text{ o sea } (D + 2)^2 y = 0.$$

Operador anulador Si L es un operador diferencial con coeficientes constantes y f es una función suficientemente diferenciable tal que

$$L(f(x)) = 0,$$

se dice que L **es un anulador** de la función; por ejemplo, una función constante como $y = k$ es anulada por D porque $Dk = 0$. La función $y = x$ es anulada por el operador diferencial D^2 porque la primera y segunda derivadas de x son 1 y 0, respectivamente. En forma similar, $D^3 x^2 = 0$, etcétera.

El operador diferencial D^n anula cada una de las siguientes funciones:

$$1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}. \tag{3}$$

Como consecuencia inmediata de la ecuación (3) y del hecho de que la diferenciaciónse puede llevar a cabo término a término, un polinomio

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} \tag{4}$$

se puede anular definiendo un operador que anule la potencia máxima de x.

Las funciones que anula un operador diferencial lineal L de orden n son aquellas que se pueden obtener de la solución general de la ecuación diferencial homogénea $L(y) = 0$.

El operador **diferencial $(D - \alpha)^n$ anula** cada una de las siguientes funciones

$$e^{\alpha x},\ xe^{\alpha x},\ x^2e^{\alpha x},\ \ldots,\ x^{n-1}e^{\alpha x}. \tag{5}$$

Para comprobarlo, observemos que la ecuación auxiliar de la ecuación homogénea $(D - \alpha)^n y = 0$ es $(m - \alpha)^n = 0$. Puesto que α es una raíz de multiplicidad n, la solución general es

$$y = c_1e^{\alpha x} + c_2xe^{\alpha x} + \cdots + c_nx^{n-1}e^{\alpha x}. \tag{6}$$

EJEMPLO 1 **Operadores anuladores**

Determine un operador diferencial que anule la función dada.

(a) $1 - 5x^2 + 8x^3$ (b) e^{-3x} (c) $4e^{2x} - 10xe^{2x}$

SOLUCIÓN a) De acuerdo con (3), sabemos que $D^4x^3 = 0$ y, como consecuencia de (4),

$$D^4(1 - 5x^2 + 8x^3) = 0.$$

b) De acuerdo con (5), con $\alpha = -3$ y $n = 1$, vemos que

$$(D + 3)e^{-3x} = 0.$$

c) Según (5) y (6), con $\alpha = 2$ y $n = 2$, tenemos

$$(D - 2)^2(4e^{2x} - 10xe^{2x}) = 0. \quad \blacksquare$$

Cuando α y β son números reales, la fórmula cuadrática indica que $[m^2 - 2am + (\alpha^2 + \beta^2)]^n = 0$ tiene las raíces complejas $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$, ambas de multiplicidad n. De acuerdo con la explicación al final de la sección 4.3 llegamos al siguiente resultado.

El operador diferencial $[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^n$ anula cada una de las siguientes funciones:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cos\beta x,\quad x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad \ldots,\quad x^{n-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\quad xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\quad x^2e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\quad \ldots,\quad x^{n-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x. \tag{7}$$

EJEMPLO 2 **Operador anulador**

Determine un operador diferencial que anule a $5e^{-x}\cos 2x - 9e^{-x}\operatorname{sen} 2x$.

SOLUCIÓN Al examinar las funciones $e^{-x}\cos 2x$ y $e^{-x}\operatorname{sen} 2x$ se ve que $\alpha = -1$ y $\beta = 2$. Entonces, según (7), llegamos a la conclusión de que $D^2 + 2D + 5$ anulara cada función. Dado que $D^2 + 2D + 5$ es un operador lineal, anulará ***cualquier*** combinación lineal de esas funciones, como $5e^{-x}\cos 2x - 9e^{-x}\operatorname{sen} 2x$. ■

Cuando $\alpha = 0$ y $n = 1$ se tiene el caso especial de (7):

$$(D^2 + \beta^2)\begin{Bmatrix}\cos \beta x \\ \operatorname{sen} \beta x\end{Bmatrix} = 0. \tag{8}$$

Por ejemplo, $D^2 + 16$ anula cualquier combinación lineal de $\operatorname{sen} 4x$ y $\cos 4x$.

Con frecuencia desearemos anular la suma de dos o más funciones. Según acabamos de ver en los ejemplos 1 y 2, si L es un operador diferencial lineal tal que $L(y_1) = 0$ y $L(y_2) = 0$, entonces anula la combinación lineal $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. Esto es consecuencia directa del teorema 4.2. Supongamos que L_1 y L_2 son operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes, tales que L_1 anula a $y_1(x)$ y L_2 anula a $y_2(x)$, pero $L_1(y_2) \neq 0$ y $L_2(y_1) \neq 0$. Entonces, el *producto* de los operadores lineales, L_1L_2, anula la suma $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. Esto se demuestra con facilidad aplicando la linealidad y el hecho de que $L_1L_2 = L_2L_1$:

$$\begin{aligned} L_1L_2(y_1 + y_2) &= L_1L_2(y_1) + L_1L_2(y_2) \\ &= L_2L_1(y_1) + L_1L_2(y_2) \\ &= L_2\underbrace{[L_1(y_1)]}_{\text{cero}} + L_1\underbrace{[L_2(y_2)]}_{\text{cero}} = 0. \end{aligned}$$

Por ejemplo, de acuerdo con (3), sabemos que D^2 anula a $7 - x$ y según (8), $D^2 + 16$ anula $\operatorname{sen} 4x$. Entonces, el producto de los operadores, que es $D^2(D^2 + 16)$, anula la combinación lineal $7 - x + 6\operatorname{sen} 4x$.

Nota

El operador diferencial que anula a una función no es único. En la parte b) del ejemplo 1 señalamos que $D + 3$ anula a e^{-3x}, pero también la anulan operadores diferenciales de orden superior, siempre que $D + 3$ sea uno de los factores del operador; por ejemplo, $(D + 3)(D + 1)$, $(D + 3)^2$ y $D^3(D + 3)$ anulan, todos, a e^{-3x}. (Compruébelo.) Para este curso, cuando busquemos un anulador de una función $y = f(x)$ obtendremos el operador del ***orden mínimo*** posible que lo haga.

Coeficientes indeterminados Lo anterior nos conduce al punto de la descripción anterior. Supongamos que $L(y) = g(x)$ es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, y que la entrada $g(x)$ consiste en sumas y productos finitos de las funciones mencionadas en (3), (5) y (7), esto es, que g(x) es una combinación lineal de funciones de la forma

$$k \text{ (constante)},\ x^m,\ x^m e^{\alpha x},\ x^m e^{\alpha x}\cos \beta x \text{ y } x^m e^{\alpha x}\operatorname{sen} \beta x,$$

en donde m es un entero no negativo y α y β son números reales. Ya sabemos que esa función g(x) se puede anular con un operador diferencial, L_1, de orden mínimo, formado por un producto de los operadores D^n, $(D - \alpha)^n$ y $(D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2)^n$. Aplicamos L_1 a ambos lados de la ecuación $L(y) = g(x)$ y obtenemos $L_1L(y) = L_1(g(x)) = 0$. Al resolver la ecuación ***homogénea y***

de orden ***superior*** $L_1L(y) = 0$, descubriremos ***la forma*** de una solución particular, y_p, de la ecuación original no ***homogénea*** $L(y) = g(x)$. A continuación sustituimos esa forma supuesta en $L(y) = g(x)$ para determinar una solución particular explícita. Este procedimiento de determinación de y_p se llama **método de los coeficientes indeterminados** y lo aplicaremos en los próximos ejemplos.

Antes de seguir, recordemos que la solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea $L(y) = g(x)$ es $y = y_c + y_p$, donde y_c es la función complementaria; esto es, la solución general de la ecuación homogénea asociada $L(y) = 0$. La solución general de cada ecuación $L(y) = g(x)$ está definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

EJEMPLO 3 **Solución general mediante coeficientes indeterminados**

Resuelva $y'' + 3y' + 2y = 4x^2$. **(9)**

SOLUCIÓN **Paso 1.** Primero resolvemos la ecuación homogénea $y'' + 3y' + 2y = 0$. A continuación, a partir de la ecuación auxiliar $m^2 + 3m + 2 = (m + 1)(m + 2) = 0$, determinamos que $m_1 = -1$ y $m_2 = -2$; por lo tanto, la función complementaria es

$$y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}.$$

Paso 2. Como el operador diferencial D^3 anula a $4x^2$, vemos que $D^3(D^2 + 3D + 2)y = 4D^3x^2$ es lo mismo que

$$D^3(D^2 + 3D + 2)y = 0. \quad \textbf{(10)}$$

La ecuación auxiliar de la ecuación (10), de quinto orden

$$m^3(m^2 + 3m + 2) = 0 \quad \text{o sea} \quad m^3(m + 1)(m + 2) = 0,$$

tiene las raíces $m_1 = m_2 = m_3 = 0$, $m_4 = -1$ y $m_5 = -2$. Así, su solución general debe ser

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \boxed{c_4e^{-x} + c_5e^{-2x}} \quad \textbf{(11)}$$

Los términos en la zona sombreada de la ecuación (11) constituyen la función complementaria de la ecuación original, (9). Entonces podemos decir que una solución particular, y_p, de (9) también debería satisfacer la ecuación (10). Esto significa que los términos restantes en la ecuación (11) han de tener la forma básica de y_p:

$$y = A + Bx + Cx^2, \quad \textbf{(12)}$$

en donde, por comodidad, hemos sustituido c_1, c_2 y c_3 por A, B y C, respectivamente. Para que la ecuación (12) sea una solución particular de la (9), se necesita determinar los coeficientes ***específicos*** A, B y C. Derivamos la función (12) para obtener

$$y_p' = B + 2Cx, \qquad y_p'' = 2C,$$

y sustituimos en (9) para llegar a

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = 2C + 3B + 6Cx + 2A + 2Bx + 2Cx^2 = 4x^2.$$

Como se supone que esta ultima ecuación tiene que ser una identidad, los coeficientes de las potencias de igual grado en x deben ser iguales:

igual

$$\boxed{2C}\,x^2 + \boxed{2B + 6C}\,x + \boxed{2A + 3B + 2C} = 4x^2 + 0x + 0.$$

Esto es, $$2C = 4, \quad 2B + 6C = 0, \quad 2A + 3B + 2C = 0. \tag{13}$$

Resolvemos las ecuaciones en **(13),** para obtener $A = 7$, $B = -6$ y $C = 2$. En esta forma, $y_p = 7 - 6x + 2x^2$.

Paso 3. La solución general de la ecuación (9) es y = $y_c + y_p$, o sea

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + 7 - 6x + 2x^2. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Solución general empleando coeficientes indeterminados

Resuelva $y'' - 3y' = 8e^{3x} + 4 \operatorname{sen} x$. **(14)**

SOLUCIÓN **Paso 1.** La ecuación auxiliar de la ecuación homogénea asociada $y'' - 3y' = 0$ es $m^2 - 3m = m(m - 3) = 0$, así que $y_c = c_1 + c_2e^{3x}$.

Paso 2. En vista de que $(D - 3)e^{3x} = 0$ y $(D^2 + 1)\operatorname{sen} x = 0$, aplicamos el operador diferencial $(D - 3)(D^2 + 1)$ a ambos lados de (14):

$$(D - 3)(D^2 + 1)(D^2 - 3D)y = 0. \tag{15}$$

La ecuación auxiliar de la ecuación (15) es

$$(m - 3)(m^2 + 1)(m^2 - 3m) = 0 \quad \text{o sea} \quad m(m - 3)^2(m^2 + 1) = 0.$$

De modo que $$y = \boxed{c_1 + c_2e^{3x}} + c_3xe^{3x} + c_4 \cos x + c_5 \operatorname{sen} x.$$

Después de excluir la combinación lineal de términos indicada en gris que corresponde a y_c, llegamos a la forma de y_p:

$$y_p = Axe^{3x} + B \cos x + C \operatorname{sen} x.$$

Sustituimos y_p en **(14),** simplificamos y obtenemos

$$y_p'' - 3y_p' = 3Ae^{3x} + (-B - 3C)\cos x + (3B - C)\operatorname{sen} x = 8e^{3x} + 4 \operatorname{sen} x.$$

Igualamos coeficientes:

$$3A = 8, \quad -B - 3C = 0, \quad 3B - C = 4.$$

Vemos que $A = \frac{8}{3}$, $B = \frac{6}{5}$ y $C = -\frac{2}{5}$ y, en consecuencia,

$$y_p = \frac{8}{3}xe^{3x} + \frac{6}{5}\cos x - \frac{2}{5}\operatorname{sen} x.$$

Paso 3. Entonces, la solución general de (14) es

$$y = c_1 + c_2e^{3x} + \frac{8}{3}xe^{3x} + \frac{6}{5}\cos x - \frac{2}{5}\operatorname{sen} x. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 5 **Solución general mediante coeficientes indeterminados**

Resuelva $y'' + y = x\cos x - \cos x$. **(16)**

SOLUCIÓN La función complementaria es $y_c = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$. Si comparamos $\cos x$ y $x \cos x$ con las funciones del primer renglón de (7), veremos que $\alpha = 0$ y $n = 1$, así que $(D^2 + 1)^2$ es un anulador del lado derecho de la ecuación (16). Aplicamos ese operador a la ecuación y tenemos

$$(D^2 + 1)^2(D^2 + 1)y = 0, \quad \text{o sea} \quad (D^2 + 1)^3y = 0.$$

Como i y $-i$ son, a la vez, raíces complejas de multiplicidad 3 de la ecuación auxiliar de la ultima ecuación diferencial, concluimos que

$$y = \boxed{c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x} + c_3x\cos x + c_4x \operatorname{sen} x\, c_5x^2\cos x + c_6x^2 \operatorname{sen} x.$$

Sustituimos

$$y_p = Ax\cos x + Bx\operatorname{sen} x + Cx^2\cos x + Ex^2\operatorname{sen} x$$

en la ecuación (16) y simplificamos:

$$y_p'' + y_p = 4Ex\cos x - 4Cx\operatorname{sen} x + (2B + 2C)\cos x + (-2A + 2E)\operatorname{sen} x$$
$$= x\cos x - \cos x.$$

Igualamos los coeficientes y obtenemos las ecuaciones

$$4E = 1, \quad -4C = 0, \quad 2B + 2C = -1, \quad -2A + 2E = 0,$$

cuyas soluciones son $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = 0$ y $E = \frac{1}{4}$. En consecuencia, la solución general de (16) es

$$y = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x + \frac{1}{4}x\cos x - \frac{1}{2}x\operatorname{sen} x + \frac{1}{4}x^2\operatorname{sen} x. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 6 **Forma de una solución particular**

Determine la forma de una solución particular de

$$y'' - 2y' + y = 10e^{-2x}\cos x. \tag{17}$$

SOLUCIÓN La función complementaria, para la ecuación dada, es $y_c = c_1e^x + c_2xe^x$. De acuerdo con (7), con $\alpha = -2$, $\beta = 1$ y $n = 1$, sabemos que

$$(D^2 + 4D + 5)e^{-2x}\cos x = 0.$$

Aplicamos el operador $D^2 + 4D + 5$ a la ecuación 17 para obtener

$$(D^2 + 4D + 5)(D^2 - 2D + 1)y = 0. \tag{18}$$

Como las raíces de la ecuación auxiliar de (18) son $-2 - i$, $-2 + i$, 1 y 1,

$$y = \boxed{c_1e^x + c_2xe^x} + c_3e^{-2x}\cos x + c_4e^{-2x}\operatorname{sen} x.$$

Se llega a una solución particular de (17) de la forma

$$y_p = Ae^{-2x}\cos x + Be^{-2x}\operatorname{sen} x. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 7 **Forma de una solución particular**

Determine la forma de una solución particular de

$$y''' - 4y'' + 4y' = 5x^2 - 6x + 4x^2e^{2x} + 3e^{5x}. \tag{19}$$

SOLUCIÓN Primero vemos que

$$D^3(5x^2 - 6x) = 0,\quad (D - 2)^3x^2e^{2x} = 0,\quad \text{y}\quad (D - 5)e^{5x} = 0.$$

Entonces, al aplicar $D^3(D - 2)^3(D - 5)$ a (19) se obtiene

$$D^3(D - 2)^3(D - 5)(D^3 - 4D^2 + 4D)y = 0$$

o sea

$$D^4(D - 2)^5(D - 5)y = 0.$$

Fácilmente se advierte que las raíces de la ecuación auxiliar de la última ecuación diferencial son 0, 0, 0, 0, **0, 2, 2, 2, 2, 2** y 5. De aquí que

$$y = \boxed{c_1} + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + \boxed{c_5e^{2x} + c_6xe^{2x}} + c_7x^2e^{2x} + c_8x^3e^{2x} + c_9x^4e^{2x} + c_{10}e^{5x}. \tag{20}$$

Como la combinación lineal $c_1 + c_5e^{2x} + c_6xe^{2x}$ corresponde a la función complementaria de (19), los términos restantes en la ecuación (20) expresan la forma que buscamos:

$$y_p = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Ex^2e^{2x} + Fx^3e^{2x} + Gx^4e^{2x} + He^{5x}. \qquad \blacksquare$$

Resumen del método Para comodidad del lector resumiremos el método de los coeficientes indeterminados.

Coeficientes indeterminados, método del anulador

La ecuación diferencial $L(y) = g(x)$ tiene coeficientes constantes y la función $g(x)$ consiste en sumas y productos finitos de constantes, polinomios, funciones exponenciales $e^{\alpha x}$, senos y cosenos.

i) Se determina la solución complementaria, y_c, de la ecuación homogénea $L(y) = 0$.

ii) Ambos lados de la ecuación no homogénea $L(y) = g(x)$ se someten a la acción de un operador diferencial, L_1, que anule la función $g(x)$.

iii) Se determina la solución general de la ecuación diferencial homogénea de orden superior $L_1L(y) = 0$.

iv) De la solución obtenida en el paso *iii)*, se eliminan todos los términos duplicados en la solución complementaria, y_c, que se determinó en el paso i). Se forma una combinación lineal, y_p, con los términos restantes. Ésta será la forma de una solución particular de $L(y) = g(x)$.

v) Se sustituye y_p que se determinó en el paso iv) en $L(y) = g(x)$. Se igualan los coeficientes de las diversas funciones a cada lado de la igualdad y se despejan los coeficientes desconocidos en y_p del sistema de ecuaciones resultante.

vi) Con la solución particular que se determino en el paso v), se forma la solución general $y = y_c + y_p$ de la ecuación diferencial dada.

Observación

El método de los coeficientes indeterminados no se puede aplicar a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables ni a ecuaciones lineales con coeficientes constantes cuando g(x) sea una función como las siguientes:

$$g(x) = \ln x, \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \tan x, \quad g(x) = \operatorname{sen}^{-1} x,$$

etc. En la próxima sección trataremos las ecuaciones diferenciales en que la entrada $g(x)$ es una función como estas últimas.

EJERCICIOS 4.5

En los problemas 1 a 10 escriba la ecuación diferencial dada en la forma $L(y) = g(x)$, donde L es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes. Si es posible, factorice L.

1. $9y'' - 4y = \operatorname{sen} x$
2. $y'' - 5y = x^2 - 2x$
3. $y'' - 4y' - 12y = x - 6$
4. $2y'' - 3y' - 2y = 1$
5. $y''' + 10y'' + 25y' = e^x$
6. $y''' + 4y' = e^x \cos 2x$
7. $y''' + 2y'' - 13y' + 10y = xe^{-x}$
8. $y''' + 4y'' + 3y' = x^2 \cos x - 3x$
9. $y^{(4)} + 8y' = 4$
10. $y^{(4)} - 8y'' + 16y = (x^3 - 2x)e^{4x}$

En los problemas 11 a 14 compruebe que el operador diferencial mencionado anula la función indicada.

11. D^4; $y = 10x^3 - 2x$ **12.** $2D - 1$; $y = 4e^{x/2}$

13. $(D - 2)(D + 5)$; $y = e^{2x} + 3e^{-5x}$

14. $D^2 + 64$; $y = 2\cos 8x - 5 \operatorname{sen} 8x$

En los problemas 15 a 26, determine un operador diferencial lineal que anule la función dada.

15. $1 + 6x - 2x^3$ **16.** $x^3(1 \quad 5x)$

17. $1 + 7e^{2x}$ **18.** $x + 3xe^{6x}$

19. $\cos 2x$ **20.** $1 + \operatorname{sen} x$

21. $13x + 9x^2 - \operatorname{sen} 4x$ **22.** $8x - \operatorname{sen} x + 10\cos 5x$

23. $e^{-x} + 2xe^x - x^2e^x$ **24.** $(2 - e^x)^2$

25. $3 + e^x \cos 2x$ **26.** $e^{-x} \operatorname{sen} x - e^{2x} \cos x$

En los problemas 27 a 34, determine funciones linealmente independientes que anulen el operador diferencial dado.

27. D^5 **28.** $D^2 + 4D$

29. $(D - 6)(2D + 3)$ **30.** $D^2 - 9D - 36$

31. $D^2 + 5$ **32.** $D^2 - 6D + 10$

33. $D^3 - 10D^2 + 25D$ **34.** $D^2(D - 5)(D - 7)$

En los problemas 35 a 64 resuelva la respectiva ecuación diferencial por el método de los coeficientes indeterminados.

35. $y'' - 9y = 54$ **36.** $2y'' - 7y' + 5y = -29$

37. $y'' + y' = 3$ **38.** $y''' + 2y'' + y' = 10$

39. $y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$ **40.** $y'' + 3y' = 4x - 5$

41. $y''' + y'' = 8x^2$ **42.** $y'' - 2y' + y = x^3 + 4x$

43. $y'' - y' - 12y = e^{4x}$ **44.** $y'' + 2y' + 2y = 5e^{6x}$

45. $y'' - 2y' - 3y = 4e^x - 9$ **46.** $y'' + 6y' + 8y = 3e^{-2x} + 2x$

47. $y'' + 25y = 6 \operatorname{sen} x$ **48.** $y'' + 4y = 4\cos x + 3\operatorname{sen} x - 8$

49. $y'' + 6y' + 9y = -xe^{4x}$ **50.** $y'' + 3y' - 10y = x(e^x + 1)$

51. $y'' - y = x^2e^x + 5$ **52.** $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}$

53. $y'' - 2y' + 5y = e^x \operatorname{sen} x$

54. $y'' + y' + \frac{1}{4}y = e^x(\operatorname{sen} 3x - \cos 3x)$

55. $y'' + 25y = 20 \operatorname{sen} 5x$ **56.** $y'' + y = 4\cos x - \operatorname{sen} x$

57. $y'' + y' + y = x \operatorname{sen} x$ **58.** $y'' + 4y = \cos^2 x$

59. $y''' + 8y'' = -6x^2 + 9x + 2$

60. $y''' - y'' + y' - y = xe^x - e^{-x} + 7$

61. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x - x + 16$

62. $2y''' - 3y'' - 3y' + 2y = (e^x + e^{-x})^2$
63. $y^{(4)} - 2y''' + y'' = e^x + 1$ 64. $y^{(4)} - 4y'' = 5x^2 - e^{2x}$

Resuelva la ecuación diferencial de cada uno de los problemas 65 a 72, sujeta a las condiciones iniciales dadas.

65. $y'' - 64y = 16$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
66. $y'' + y' = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
67. $y'' - 5y' = x - 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$
68. $y'' + 5y' - 6y = 10e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
69. $y'' + y = 8 \cos 2x - 4 \operatorname{sen} x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
70. $y''' - 2y'' + y' = xe^x + 5$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -1$
71. $y'' - 4y' + 8y = x^3$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$
72. $y^{(4)} - y = x + e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$

Problema para discusión

73. Suponga que L es un operador diferencial lineal factorizable, pero que tiene coeficientes variables. ¿Los factores de L se conmutan? Defienda su aseveración.

4.6 VARIACIÓN DE PARÁMETROS

- *Forma reducida de una ecuación diferencial lineal, no homogénea y de segundo orden*
- *Una solución particular con parámetros variables*
- *Determinación por integración de parámetros variables*
- *El wronskiano* ■ *Ecuaciones diferenciales de orden superior*

El procedimiento que seguimos en la sección 2.3 para llegar a una solución particular de una ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \tag{1}$$

en un intervalo se aplica también a ecuaciones lineales de orden superior. Para adaptar el método de **variación de parámetros** a una ecuación diferencial de segundo orden,

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \tag{2}$$

comenzaremos igual que en la sección 4.2; es decir, llevaremos la ecuación diferencial a su forma reducida

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \tag{3}$$

dividiéndola por el primer coeficiente, $a_2(x)$. Suponemos que P(x), $Q(x)$ y $f(x)$ son continuas en algún intervalo I. La ecuación (3) es el análogo de la ecuación (1). Según vimos en la sección 4.3, no hay dificultad en obtener la función complementaria, y_c, de (2), cuando los coeficientes son constantes.

Hipótesis Es similar a la hipótesis $y_p = u(x)y_1(x)$ que usamos en la sección 2.3 a fin de hallar una solución particular, y_p, de la ecuación lineal de primer orden (1). Para la ecuación lineal de segundo orden (2) se busca una solución de la forma

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x), \tag{4}$$

en que y_1 y y_2 formen un conjunto fundamental de soluciones, en I, de la forma homogénea asociada de (2). Aplicamos dos veces la regla del producto para diferenciar y_p y obtenemos

$$y_p' = u_1y_1' + y_1u_1' + u_2y_2' + y_2u_2'$$
$$y_p'' = u_1y_1'' + y_1'u_1' + y_1u_1'' + u_1'y_1' + u_2y_2'' + \text{y; } u_2' + y_2u_2'' + u_2'y_2'.$$

Sustituimos (4), las derivadas de arriba en la ecuación (2) y agrupamos los términos:

$$\begin{aligned} y_p'' + P(x)y_p' + Q(x)y_p &= \underbrace{u_1[\,y_1'' + Py_1' + Qy_1]}_{\text{cero}} + \underbrace{u_2[\,y_2'' + Py; + Qy_2]}_{\text{cero}} \\ &\quad + y_1u_1'' + uíyí + y_2u_2'' + u_2'y_2' + P[y_1u_1' + y_2u_2'] + y_1'u_1' + y_2'u_2' \\ &= \frac{d}{dx}[y_1u_1'] + \frac{d}{dx}[y_2u_2'] + P[y_1u_1' + y_2u_2'] + y_1'u_1' + y_2'u_2' \\ &= \frac{d}{dx}[y_1u_1' + y_2u_2'] + P[y_1u_1' + y_2u_2'] + \text{yíu; } + y_2'u_2' = f(x). \end{aligned} \tag{5}$$

Dado que buscamos determinar dos funciones desconocidas, u_1 y u_2, es de esperar que necesitemos dos ecuaciones. Las podemos obtener si establecemos la hipótesis adicional de que las funciones u_1 y u_2 satisfacen $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$. Esta hipótesis es pertinente porque si pedimos que $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$, la ecuación (5) se reduce a $y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x)$. Con ello ya tenemos las dos ecuaciones que deseábamos, aunque sea para determinar las derivadas u_1' y u_2'. Aplicamos la regla de Cramer y la solución del sistema

$$y_1u_1' + y_2u_2' = 0$$
$$y_1'u_1' + y_2'u_2' = \text{f(x)}$$

se puede expresar en términos de los determinantes

$$u_1' = \frac{W_1}{W} \quad \text{y} \quad u_2' = \frac{W_2}{W}, \tag{6}$$

en donde

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Las funciones u_1 y u_2 se determinan integrando los resultados en (6). Se ve que el determinante W es el wronskiano de y_1 y y_2. Sabemos, por la independencia lineal entre y_1 y y_2 en I, que $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$ para toda x en el intervalo.

Resumen del método Por lo general, no se aconseja memorizar fórmulas, sino más bien comprender un procedimiento. Sin embargo, el procedimiento anterior es demasiado largo y complicado para recurrir a él cada que deseemos resolver una ecuación diferencial. En este caso lo más eficaz es usar las formulas (6). Así, para resolver $a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x)$, primero se halla la función complementaria $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$, y después se calcula el wronskiano $W(y_1(x), y_2(x))$. Se divide entre a_2 para llevar la ecuación a su forma reduciday" + Py' + $Qy = f(x)$ para hallar $f(x)$. Se determinan u_1 y u_2 integrando, respectivamente, $u_1' = W_1/W$ y $u_2' = W_2/W$, donde se definen W_1 y W_2 de acuerdo con (7). Una solución particular es $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$. La solución general de la ecuación es, por consiguiente, $y = y_c + y_p$.

EJEMPLO 1 **Solución general mediante variación de parámetros**

Resuelva $y'' - 4y' + 4y = (x + 1)e^{2x}$.

SOLUCIÓN Partimos de la ecuación auxiliar $m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2 = 0$, y tenemos que $y_c = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$. Identificamos $y_1 = e^{2x}$ y $y_2 = xe^{2x}$ y calculamos el wronskiano

$$W(e^{2x}, xe^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x}$$

Como la ecuación diferencial dada está en la forma reducida (3) (esto es, el coeficiente de y" es 1), vemos que $f(x) = (x + 1)e^{2x}$. Aplicamos (7) y efectuamos las operaciones

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{2x} \\ (x + 1)e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = -(x + 1)xe^{4x}, \qquad W_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & (x + 1)e^{2x} \end{vmatrix} = (x + 1)e^{4x},$$

y así, según (6),

$$u_1' = -\frac{(x + 1)xe^{4x}}{e^{4x}} = -x^2 - x, \qquad u_2' = \frac{(x + 1)e^{4x}}{e^{4x}} = x + 1.$$

En consecuencia, $u_1 = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$, y $u_2 = \frac{x^2}{2} + x$.

Entonces, $$y_p = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)xe^{2x} = \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right)e^{2x}$$

Y $$y = y_c + y_p = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right)e^{2x}.$$ ■

EJEMPLO 2 **Solución general mediante variación de parámetros**

Resuelva $4y'' + 36y = \csc 3x$.

SOLUCIÓN Primero llevamos la ecuación a su forma reducida (6) dividiéndola por 4:

$$y'' + 9y = \frac{1}{4}\csc 3x.$$

En virtud de que las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 + 9 = 0$ son $m_1 = 3i$ y $m_2 = -3i$, la función complementaria es $y_c = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x$. Sustituimos $y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \operatorname{sen} 3x$ y $f(x) = \frac{1}{4}\csc 3x$ en las definiciones (7) y obtenemos

$$W(\cos 3x, \operatorname{sen} 3x) = \begin{vmatrix} \cos 3x & \operatorname{sen} 3x \\ -3\operatorname{sen} 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = 3$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} 3x \\ \frac{1}{4}\csc 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}, \qquad W_2 = \begin{vmatrix} \cos 3x & 0 \\ -3\operatorname{sen} 3x & \frac{1}{4}\csc 3x \end{vmatrix} = \frac{1\cos 3x}{4\operatorname{sen} 3x}.$$

Al integrar

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{1}{12} \quad \text{y} \quad u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{1}{12}\frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}$$

obtenemos

$$u_1 = -\frac{1}{12}x \quad \text{y} \quad u_2 = \frac{1}{36}\ln|\operatorname{sen} 3x|.$$

Así, una solución particular es

$$y_P = -\frac{1}{12}x\cos 3x + \frac{1}{36}(\operatorname{sen} 3x)\ln|\operatorname{sen} 3x|.$$

La solución general de la ecuación es

$$y = y_c + y_p = c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{12}x\cos 3x + \frac{1}{36}(\operatorname{sen} 3x)\ln|\operatorname{sen} 3x|. \qquad (8)$$

La ecuación (8) representa la solución general de la ecuación diferencial en, por ejemplo, el intervalo $(0, \pi/6)$.

Constantes de integración Al determinar las integrales indefinidas de u_1' y u_2', no necesitamos introducir constantes. Porque

$$\begin{aligned} y = y_c + y_p &= c_1y_1 + c_2y_2 + (u_1 + a_1)y_1 + (u_2 + b_1)y_2 \\ &= (c_1 + a_1)y_1 + (c_2 + b_1)y_2 + u_1y_1 + u_2y_2 \\ &= C_1y_1 + C_2y_2 + u_1y_1 + u_2y_2. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 **Solución general por variación de parámetros**

Resuelva $y'' - y = \frac{1}{x}$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar, $m^2 - 1 = 0$ da como resultado $m_1 = -1$ y $m_2 = 1$. Entonces, $y_c = c_1e^x + c_2e^{-x}$. Tenemos $W(e^x, e^{-x}) = -2$ y

$$u_1' = -\frac{e^{-x}(1/x)}{-2}, \qquad u_1 = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt,$$

$$u_2' = \frac{e^{x}(1/x)}{-2}, \qquad u_2 = -\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{t}}{t}\,dt.$$

Se sabe bien que las integrales que definen a u_1 y u_2 no se pueden expresar en términos de funciones elementales. En consecuencia, escribimos

$$y_p = \frac{1}{2}e^x\int_{x_0}^{x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \frac{1}{2}e^{-x}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{t}}{t}\,dt,$$

y así

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}e^x\int_{x_0}^{x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \frac{1}{2}e^{-x}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{t}}{t}\,dt. \quad \blacksquare$$

En el ejemplo 3 podemos integrar en cualquier intervalo $x_0 \le t \le x$ que no contenga al origen.

Ecuaciones de orden superior El método que acabamos de describir para las ecuaciones diferenciales no homogéneas de segundo orden, se puede generalizar a ecuaciones lineales de orden n escritas en su forma estándar

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_1(x)y' + P_0(x)y = f(x). \tag{9}$$

Si $y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$ es la función complementaria de (9), una solución particular es

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x),$$

en que las u_k', $k = 1, 2, \ldots, n$ están determinadas por las n ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1u_1' + y_2u_2' + \cdots + y_nu_n' &= 0 \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' + \cdots + y_n'u_n' &= 0 \end{aligned}$$

$$y_1^{(n-1)}u_1' + y_2^{(n-1)}u_2' + \cdots + y_n^{(n-1)}u_n' = f(x).$$

Las primeras $n - 1$ ecuaciones del sistema, al igual que $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$ en (5), son hipótesis hechas para simplificar la ecuación resultante después de sustituir $y_p = u_1(x)y_1(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x)$ *en (9).* En este caso, la regla de Cramer da

$$u_k' = \frac{W_k}{W}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

en donde W es el wronskiano de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, y W_k es el determinante obtenido al sustituir la k-ésima columna del wronskiano por la columna

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \\ 0 \\ f(x). \end{matrix}$$

Cuando $n = 2$ se obtiene (6).

Observación

i) El método de variación de parámetros tiene una clara ventaja sobre el de los coeficientes indeterminados, porque siempre llega a una solución particular, y_p, cuando se puede resolver la ecuación homogénea relacionada. Este método no se limita a una función $f(x)$ que sea una combinación de los cuatro tipos de funciones de la página 121. En las ecuaciones diferenciales con coeficientes variables también se puede aplicar el método de la variación de parámetros, así el de los coeficientes indeterminados.

ii) En los problemas que siguen, no se debe vacilar en simplificar la forma de y_p. De acuerdo con la forma en que se haya llegado a las antiderivadas de u_1' y u_2', quizá el lector no llegue a la misma y_p que aparece en la parte de respuestas; por ejemplo, en el problema 3 tanto $y_p = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} x \cos x$ como $y_p = \frac{1}{4}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} x \cos x$ son respuestas válidas. En cualquiera de los casos, la solución general $y = y_c + y_p$ se simplifica ay $= c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} x \cos x$. ¿Por qué?

EJERCICIOS 4.6

Resuelva cada una de las ecuaciones diferenciales en los problemas 1 a 24 por variación de parámetros. Proponga un intervalo en que la solución general esté definida.

1. $y'' + y = \sec x$
2. $y'' + y = \tan x$
3. $y'' + y = \operatorname{sen} x$
4. $y'' + y = \sec x \tan x$
5. $y'' + y = \cos^2 x$
6. $y'' + y = \sec^2 x$
7. $y'' - y = \cosh x$
8. $y'' \quad y = \operatorname{senh} 2x$
9. $y'' - 4y = \dfrac{e^{2x}}{x}$
10. $y'' - 9y = \dfrac{9x}{e^{3x}}$
11. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^x}$
12. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{3x}}{1 + e^x}$
13. $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen} e^x$
14. $y'' - 2y' + y = e^x \arctan x$
15. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$
16. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sec x$
17. $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$
18. $y'' + 10y' + 25y = \dfrac{e^{-10x}}{x^2}$
19. $3y'' - 6y' + 30y = e^x \tan 3x$
20. $4y'' - 4y' + y = e^{x/2}\sqrt{1 - x^2}$

21. $y''' + y' = \tan x$ 22. $y''' + 4y' = \sec 2x$

23. $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{3x}$ 24. $2y''' - 6y'' = x^2$

En los problemas 25 a 28 resuelva por variación de parámetros la ecuación respectiva, sujeta a las condiciones iniciales y(O) = 1, y'(O) = 0.

25. $4y'' - y = xe^{x/2}$ 26. $2y'' + y' - y = x + 1$

27. $y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}$ 28. $y'' - 4y' + 4y = (12x^2 - 6x)e^{2x}$

29. Si $y_1 = x^{-1/2}\cos x$ y $y_2 = x^{-1/2}$ sen x forman un conjunto fundamental de soluciones de $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ en (0, ∞), determine la solución general de

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{3/2}.$$

30. Si $y_1 = \cos(\ln x)$ y $y_2 = \text{sen}(\ln x)$ son soluciones conocidas, linealmente independientes, de x^2y'' + xy' + y = 0, en (0, ∞), determine una solución particular de

$$x^2y'' + xy' + y = \sec(\ln x).$$

Problemas para discusión

31. Determine la solución general de la ecuación diferencial del problema 30. Diga por qué el intervalo de validez de la solución general no es (0, ∞).

32. Describa cómo se pueden combinar los métodos de coeficientes indeterminados y de variación de parámetros para resolver la ecuación diferencial

$$y'' + y' = 4x^2 - 3 + \frac{e^x}{x}.$$

4.7 ECUACIÓN DE CAUCHY-EULER

- *Una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables especiales*
- *Ecuación auxiliar* ■ *Raíces de una ecuación auxiliar cuadrática*
- *Formas de la solución general de una ecuación diferencial de Cauchy-Euler, lineal, homogénea y de segundo orden* ■ *Uso de variación de parámetros*
- *Ecuaciones diferenciales de orden superior* ■ *Reducción a ecuaciones con coeficientes constantes*

La facilidad relativa con que pudimos determinar soluciones explícitas de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior con coeficientes constantes en las secciones anteriores, en general no se consigue con las ecuaciones lineales con coeficientes variables. En el capítulo 6, veremos que cuando una ecuación diferencial lineal tiene coeficientes variables, lo mejor que podemos esperar, *por* lo general, es determiinar una solución en forma de serie infinita. Sin embargo, el tipo de ecuación diferencial que examinaremos en esta sección es una excepción a la regla: se trata de una ecuación con coeficientes variables cuya solución general siempre se puede expresar en términos de potencias de x, senos, cosenos y funciones logarítmicas y

exponenciales. Es más, este método de solución es bastante similar al de las ecuaciones con coeficientes constantes.

Ecuación de Cauchy-Euler o ecuación equidimensional Toda ecuación diferencial lineal de la forma

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \quad + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x),$$

donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son constantes, tiene los nombres de **ecuación de Cauchy-Euler, ecuación de Euler-Cauchy, ecuación de Euler o ecuación equidimensional.** La característica observable de este tipo de ecuación es que el grado $k = n, n - 1, \ldots, 0$ de los coeficientes monomiales x^k coincide con el orden k de la diferenciación, $d^k y/dx^k$:

$$\underset{\text{iguales}}{a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n}} + \underset{\text{iguales}}{a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}} + \cdots.$$

Al igual que en la sección 4.3, comenzaremos el desarrollo examinando detalladamente las formas de las soluciones generales de la ecuación homogénea de segundo orden

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0.$$

La solución de ecuaciones de orden superior será análoga. Una vez determinada la función complementaria $y_c(x)$ también podemos resolver la ecuación no homogénea $ax^2y'' + bxy' + cy = g(x)$ con el método de variación de parámetros.

Nota

El coeficiente de d^2y/dx^2 es cero cuando $x = 0$; por consiguiente, para garantizar que los resultados fundamentales del teorema 4.1 se apliquen a la ecuación de Cauchy-Euler, concentraremos nuestra atención en determinar la solución general en el intervalo $(0, \infty)$. Se pueden obtener las soluciones en el intervalo $(-\infty, 0)$ sustituyendo $t = -x$ en la ecuación diferencial.

Método de solución Intentaremos una solución de la forma $y = x^m$, donde m esta por determinar. La primera y segunda derivadas son, respectivamente,

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} \quad \text{Y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} ax^2 \frac{d^2y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy &= ax^2 \cdot m(m-1)x^{m-2} + bx \cdot mx^{m-1} + cx^m \\ &= am(m-1)x^m + bmx^m + cx^m = x^m(am(m-1) + bm + c). \end{aligned}$$

Así, $y = x^m$ es una solución de la ecuación diferencial siempre que m sea una **solución** de la **ecuación auxiliar**

$$am(m-1) + bm + c = 0 \quad \text{o} \quad am^2 + (b-a)m + c = 0. \tag{1}$$

Hay tres casos distintos por considerar que dependen de si las raíces de esta ecuación cuadrática son reales y distintas, reales repetidas (o iguales) o complejas. En el último caso las raíces serán un par conjugado.

CASO I: raíces reales distintas Sean m_1 y m_2 las raíces reales de (1), tales que $m_1 \neq m_2$. Entonces $y_1 = x^{m_1}$ y $y_2 = x^{m_2}$ forman un conjunto fundamental de soluciones. Así pues, la solución general es

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}. \tag{2}$$

EJEMPLO 1 Ecuación de Cauchy-Euler: raíces distintas

Resuelva $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0.$

SOLUCIÓN En lugar de memorizar la ecuación (1), para comprender el origen y la diferencia entre esta nueva forma de la ecuación auxiliar y la que obtuvimos en la sección 4.3 las primeras veces es preferible suponer que la solución es $y = x^m$. Diferenciamos dos veces

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2},$$

y sustituimos en la ecuación diferencial

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4y = x^2 \cdot m(m-1)x^{m-2} - 2x \cdot mx^{m-1} - 4x^m$$
$$= x^m(m(m-1) - 2m - 4) = x^m(m^2 - 3m - 4) = 0$$

si $m^2 - 3m - 4 = 0$. Pero (m + l)(m - 4) = 0 significa que $m_1 = -1$ y $m_2 = 4$, así que

$$y = c_1x^{-1} + c_2x^4. \qquad \blacksquare$$

CASO II: raíces reales repetidas Si las raíces de (1) son repetidas (esto es, si $m_1 = m_2$), sólo llegaremos a una solución, que es $y = x^{m_1}$. Cuando las raíces de la ecuación cuadrática $am^2 + (b - a)m + c = 0$ son iguales, el discriminante de los coeficientes tiene que ser cero. De acuerdo con la formula cuadrática, la raíz debe ser $m_1 = -(b - a)/2a$.

Podemos formar ahora una segunda solución, y_2, empleando (5) de la sección 4.2. Primero escribimos la ecuación de Cauchy-Euler en la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{b}{ax}\frac{dy}{dx} + \frac{c}{ax^2}y = 0$$

e identificamos $P(x) = b/ax$ e $\int (b/ax)dx = (b/a) \ln x$. Así

$$\begin{aligned} y_2 &= x^{m_1} \int \frac{e^{-(b/a)\ln x}}{x^{2m_1}} dx \\ &= x^{m_1} \int x^{-b/a} \cdot x^{-2m_1} dx \qquad \leftarrow e^{-(b/a)\ln x} = e^{\ln x^{-b/a}} = x^{-b/a} \\ &= x^{m_1} \int x^{-b/a} \cdot x^{(b-a)/a} dx \qquad \leftarrow -2m_1 = (b-a)/a \\ &= x^{m_1} \int \frac{dx}{x} = x^{m_1} \ln x. \end{aligned}$$

Entonces, la solución general es

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} \ln x \tag{3}$$

EJEMPLO 2 **Ecuación de Cauchy-Euler: raíces repetidas**

Resuelva $4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} + y = 0$.

SOLUCIÓN La sustitución $y = x^m$ da

$$4x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} + y = x^m(4m(m-1) + 8m + 1) = x^m(4m^2 + 4m + 1) = 0$$

cuando $4m^2 + 4m + 1 = 0$, o $(2m + 1)^2 = 0$. Como $m_1 = -\frac{1}{2}$, la solución general es

$$y = c_1 x^{-1/2} + c_2 x^{-1/2} \ln x.$$

■

Para las ecuaciones de orden superior se puede demostrar que si m_1 es raíz de multiplicidad k, entonces

$$x^{m_1},\ x^{m_1} \ln x,\ x^{m_1}(\ln x)^2,\ \ldots,\ x^{m_1}(\ln x)^{k-1}$$

son k soluciones linealmente independientes. En consecuencia, la solución general de la ecuación diferencial debe contener una combinación lineal de esas k soluciones.

CASO III: raíces complejas conjugadas Si las raíces de (1) son el par conjugado $m_1 = \alpha + i\beta$, $m_2 = \alpha - i\beta$, donde α y $\beta > 0$ son reales, una solución es

$$y = C_1 x^{\alpha+i\beta} + C_2 x^{\alpha-i\beta}$$

Pero cuando las raíces de la ecuación auxiliar son complejas, como en el caso de ecuaciones con coeficientes constantes, conviene formular la solución sólo en términos de funciones reales. Vemos la identidad

$$x^{i\beta} = (e^{\ln x})^{i\beta} = e^{i\beta \ln x},$$

que, según la fórmula de Euler, es lo mismo que

$$x^{i\beta} = \cos(\beta \ln x) + i\,\text{sen}(\beta \ln x).$$

De igual manera,
$$x^{-i\beta} = \cos(\beta \ln x) - i\,\text{sen}(\beta \ln x).$$

Sumamos y restamos los últimos dos resultados para obtener

$$x^{i\beta} + x^{-i\beta} = 2\cos(\beta \ln x) \quad \text{y} \quad x^{i\beta} - x^{-i\beta} = 2i\,\text{sen}(\beta \ln x),$$

respectivamente. Basándonos en que $y = C_1x^{\alpha+i\beta} + C_2x^{\alpha-i\beta}$ es una solución para todos los valores de las constantes vemos, a la vez, para $C_1 = C_2 = 1$ y $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, que

$$y_1 = x^{\alpha}(x^{i\beta} + x^{-i\beta}) \quad \text{y} \quad y_2 = x^{\alpha}(x^{i\beta} - x^{-i\beta})$$

o bien
$$y_1 = 2x^{\alpha}\cos(\beta \ln x) \quad \text{y} \quad y_2 = 2ix^{\alpha}\,\text{sen}(\beta \ln x)$$

también son soluciones. Como $W(x^{\alpha}\cos(\beta \ln x), x^{\alpha}\,\text{sen}(\beta \ln x)) = \beta x^{2\alpha-1} \neq 0$, $\beta > 0$ en el intervalo $(0, \infty)$, llegamos a la conclusión

$$y_1 = x^{\alpha}\cos(\beta \ln x) \quad \text{y} \quad y_2 = x^{\alpha}\,\text{sen}(\beta \ln x)$$

forman un conjunto fundamental de soluciones reales de la ecuación diferencial; por lo tanto, la solución general es

$$y = x^{\alpha}[c_1\cos(\beta \ln x) + c_2\,\text{sen}(\beta \ln x)]. \tag{4}$$

EJEMPLO 3 **Un problema de valores iniciales**

Resuelva el problema de valor inicial

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + 3y = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = -5.$$

SOLUCIÓN Tenemos que

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + 3y = x^m(m(m-1) + 3m + 3) = x^m(m^2 + 2m + 3) = 0$$

cuando $m^2 + 2m + 3 = 0$. Aplicamos la fórmula cuadrática y vemos que $m_1 = -1 + \sqrt{2}i$ y $m_2 = -1 - \sqrt{2}i$. Si identificamos $\alpha = -1$ y $\beta = \sqrt{2}$, de acuerdo con (4), la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = x^{-1}[c_1\cos(\sqrt{2} \ln x) + c_2\,\text{sen}(\sqrt{2} \ln x)].$$

Al aplicar las condiciones $y(1) = 1$, $y'(1) = -5$ a la solución anterior, resulta que $c_1 = 1$ y $c_2 = -2\sqrt{2}$. Así, la solución al problema de valores iniciales es

$$y = x^{-1}[\cos(\sqrt{2} \ln x) - 2\sqrt{2}\,\text{sen}(\sqrt{2} \ln x)].$$

La gráfica de esa solución, obtenida con ayuda de software, aparece en la figura 4.5. ■

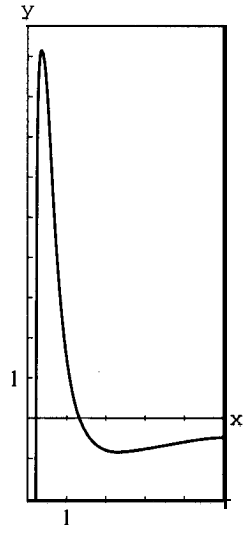


FIGURA 4.5

A continuación mostraremos un ejemplo de solución de una ecuación de Cauchy-Euler de tercer orden.

EJEMPLO 4 **Ecuación de Cauchy-Euler de tercer orden**

Resuelva $x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 5x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 7x\frac{dy}{dx} + 8y = 0.$

SOLUCIÓN Las primeras tres derivadas dey = x^m son

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

así que la ecuación diferencial del problema se transforma en

$$\begin{aligned} x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 5x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 7x\frac{dy}{dx} + 8y &= x^3m(m-1)(m-2)\,x^{m-3} + 5x^2m(m-1)x^{m-2} + 7xmx^{m-1} + 8x^m \\ &= x^m(m(m-1)(m-2) + 5m(m-1) + 7m + 8) \\ &= x^m(m^3 + 2m^2 + 4m + 8) = x^m(m+2)(m^2+4) = 0. \end{aligned}$$

En este caso vemos que $y = x^m$ será una solución de la ecuación cuando $m_1 = -2$, $m_2 = 2i$ y $m_3 = -2i$. En consecuencia, la solución general es

$$y = c_1x^{-2} + c_2\cos(2\ln x) + c_3\operatorname{sen}(2\ln x). \qquad \blacksquare$$

Dado que el método de los coeficientes indeterminados **sólo** se puede aplicar a ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, no es aplicable directamente a una ecuación no homogénea de Cauchy-Euler.

En nuestro ultimo ejemplo emplearemos el método de **variación** de parámetros.

EJEMPLO 5 **Método de variación de parámetros**

Resuelva la ecuación no homogénea

$$x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^4e^x.$$

SOLUCIÓN Sustituimos $y = x^m$ y llegamos a la ecuación auxiliar

$$m(m-1) - 3m + 3 = 0 \quad \text{o sea} \quad (m-1)(m-3) = 0.$$

Entonces $$y_c = c_1x + c_2x^3.$$

Antes de emplear variación de parámetros para encontrar una solución particular $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$, recordemos que las fórmulas $u_1' = W_1/W$ y $u_2' = W_2/W$ (donde W_1, W_2 y W son los determinantes definidos en la pagina 164) se dedujeron según la hipótesis de que la ecuación diferencial se había puesto en la forma reducida, $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$; por consiguiente, dividiremos la ecuación dada entre x^2 y, de

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 2x^2e^x$$

identificamos $f(x) = 2x^2e^x$. Entonces, con $y_1 = x$, $y_2 = x^3$ y

$$W = \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x2 \end{vmatrix}_{=\,2x3}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ 2x^2e^x & 3x^2 \end{vmatrix} = -2x^5e^x, \quad W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 2x^2e^x \end{vmatrix} = 2x^3e^x$$

encontramos $$u_1' = -\frac{2x^5e^x}{2x^3} = -x^2e^x \quad \text{Y} \quad u_2' = \frac{2x^3e^x}{2x3} = e^x.$$

La integral de la última función es inmediata; pero en el caso de u_1' integraremos dos veces por partes. Los resultados son $u_1 = -x^2e^x + 2xe^x - 2e^x$ y $u_2 = e^x$; por consiguiente,

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 = (-x^2e^x + 2xe^x - 2e^x)x + e^xx^3 = 2x^2e^x - 2xe^x.$$

Por ultimo, llegamos ay $= y_c + y_p = c_1x + c_2x^3 + 2x^2e^x - 2xe^x.$ ∎

Observacion

la semejanza entre las formas de las soluciones a las ecuaciones de Cauchy-Euler y a las ecuaciones lineales con coeficientes constantes no es mera coincidencia; por ejemplo, cuando las raíces de las ecuaciones auxiliares de $ay'' + by' + cy = 0$ y $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ son distintas y reales, las soluciones generales respectivas son

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} \quad \text{y} \quad y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}, \quad x > 0. \tag{5}$$

En vista de la identidad $e^{\ln x} = x$, $x > 0$, la segunda solución de (5) se puede expresar en la misma forma que la primera:

$$y = c_1e^{m_1\ln x} + c_2e^{m_2\ln x} = c_1e^{m_1t} + c_2e^{m_2t},$$

donde $t = \ln x$. Este último resultado ilustra otro hecho matemático: toda ecuación de Cauchy-Euler siempre se puede escribir en la forma de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, mediante la sustitución $x = e^t$. La idea es resolver la nueva ecuación diferencial en términos de la variable t siguiendo los métodos de las secciones anteriores, y una vez obtenido la solución general, restituir $t = \ln x$. Dado que con este procedimiento se repasa muy bien la regla de la cadena para diferenciación, se recomienda no dejar de resolver los problemas 35 a 40 en los ejercicios 4.7.

EJERCICIOS 4.7

En los problemas 1 a 22 resuelva la ecuación diferencial respectiva.

1. $x^2y'' - 2y = 0$
2. $4x^2y'' + y = 0$
3. $xy'' + y' = 0$
4. $xy'' - y' = 0$
5. $x^2y'' + xy' + 4y = 0$
6. $x^2y'' + 5xy' + 3y = 0$
7. $x^2y'' - 3xy' - 2y = 0$
8. $x^2y'' + 3xy' - 4y = 0$
9. $25x^2y'' + 25xy' + y = 0$
10. $4x^2y'' + 4xy' \quad y = 0$
11. $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$
12. $x^2y'' + 8xy' + 6y = 0$
13. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$
14. $x^2y'' \quad 7xy' + 41y = 0$
15. $3x^2y'' + 6xy' + y = 0$
16. $2x^2y'' + xy' + y = 0$
17. $x^3y''' - 6y = 0$
18. $x^3y''' + xy' \quad y = 0$
19. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x\dfrac{dy}{dx} + 8y = 0$
20. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4x\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$
21. $x\dfrac{d^4y}{dx^4} + 6\dfrac{d^3y}{dx^3} = 0$
22. $x^4\dfrac{d^4y}{dx^4} + 6x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} + 9x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

En los problemas 23 a 26 resuelva cada ecuación diferencial, sujeta a las condiciones iniciales indicadas.

23. $x^2y'' + 3xy' = 0, \quad y(1) = 0, \; y'(1) = 4$
24. $x^2y'' - 5xy' + 8y = 0, \quad y(2) = 32, \; y'(2) = 0$
25. $x^2y'' + xy' + y = 0, \quad y(1) = 1, \; y'(1) = 2$
26. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad y(1) = 5, \; y'(1) = 3$

En los problemas 27 y 28 resuelva la ecuación diferencial respectiva sujeta a las condiciones iniciales indicadas. [Sugerencia: sea $t = -x$.]

27. $4x^2y'' + y = 0, \quad y(-1) = 2, \; y'(-1) = 4$
28. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0, \quad y(-2) = 8, \; y'(-2) = 0$

Resuelva los problemas 29 a 34 por el método de variación de parámetros.

29. $xy'' + y' = x$ **30.** $xy'' - 4y' = x^4$

31. $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x$ **32.** $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^4e^x$

33. $x^2y'' - xy' + y = 2x$ **34.** $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x$

En los problemas 35 a 40 use la sustitución $x = e^t$ para transformar la ecuación respectiva de Cauchy-Euler en una ecuación diferencial con coeficientes constantes. Resuelva la ecuación original a través de la nueva ecuación mediante los procedimientos de las secciones 4.4 y 4.5.

35. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 10x\dfrac{dy}{dx} + 8y = x^2$ **36.** $x^2y'' - 4xy' + 6y = \ln x^2$

37. $x^2y'' - 3xy' + 13y = 4 + 3x$

38. $2x^2y'' - 3xy' - 3y = 1 + 2x + x^2$

39. $x^2y'' + 9xy' - 2oy = \dfrac{5}{x^3}$

40. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6x\dfrac{dy}{dx} - 6y = 3 + \ln x^3$

Problema *para discusión*

41. El valor del primer coeficiente, a_nx^n, de toda ecuación de Cauchy-Euler es cero cuando $x = 0$. **Se** dice que **0 es un punto singular** de la ecuación diferencial (véase **sec.** 6.2). Un punto singular es potencialmente problemático porque las soluciones de la ecuación diferencial *pueden* llegar a ser no acotadas o presentar algún comportamiento peculiar cerca del punto. Describa la naturaleza de los pares de raíces m_1 y m_2 de la ecuación auxiliar de (1) en cada uno de los siguientes casos: 1) reales distintas (por ejemplo, m_1 positiva y m_2 positiva); 2) reales repetidas, y 3) complejas conjugadas. Determine las soluciones correspondientes y, con una calculadora graficadora o **software** graficador, trace 'esas soluciones. Describa el comportamiento de esas soluciones cuando $x \to 0^+$.

4.8 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

■ *Solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales* ■ *Operadores diferenciales lineales* ■ *Eliminación sistemática* ■ *Solución con determinantes*

Las ecuaciones diferenciales ordinarias simultaneas consisten en dos o más ecuaciones con derivadas de dos o más funciones desconocidas de **una** sola variable independiente. Si x, y y z son funciones de la variable t,

$$4\frac{d^2x}{dt^2} = -5x + y \qquad x' - 3x + y' + z' = 5$$

$$\mathbf{Y} \qquad x' - y' + 2z' = t^2$$

$$2\frac{d^2y}{dt^2} = 3x - y \qquad x + y' - 6z' = t - 1$$

son dos ejemplos de sistemas de ecuaciones diferenciales simultáneas.

Solución de un sistema Una **solución** de un sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto de funciones suficientemente diferenciables $x = \phi_1(t)$, $y = \phi_2(t)$, $z = \phi_3(t)$, etc., que satisfacen cada ecuación del sistema en un intervalo común I.

Eliminación sistemática El primer método que describiremos para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes se basa en el principio algebraico de la **eliminación sistemática de variables.** El análogo de ***multiplicar*** una ecuación algebraica por una constante ***es operar*** una ecuación diferencial con alguna combinación de derivadas. Para este fin, se reformulan las ecuaciones de un sistema en términos del operador diferencial D. Recuérdese que, según la sección 4.1, una ecuación lineal única

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(t),$$

en donde las a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes, se puede escribir en la forma

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0) y = g(t).$$

El operador diferencial lineal de orden n, $a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + A_1 D + a_0$ se representa en la forma abreviada $P(D)$. Como $P(D)$ es un polinomio en el símbolo D, podremos factorizarlo en operadores diferenciales de orden menor. Ademas, los factores de $P(D)$ son conmutativos.

EJEMPLO 1 **Sistema escrito en notación de operador**

Escriba el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x'' + 2x' + y'' &= x + 3y + \operatorname{sen} t \\ x' + y' &= -4x + 2y + e^{-t} \end{aligned}$$

en notación de operador.

SOLUCIÓN El sistema dado se reescribe como sigue:

$$\begin{aligned} x'' + 2x' - x + y'' - 3y &= \operatorname{sen} t \\ x' + 4x + y' - 2y &= e^{-t} \end{aligned} \quad \text{de modo que} \quad \begin{aligned} (D^2 + 2D - 1)x + (D^2 - 3)y &= \operatorname{sen} t \\ (D + 4)x + (D - 2)y &= e^{-t}. \end{aligned}$$

■

Método de solución Se tiene el sistema sencillo de ecuaciones lineales de primer orden

$$\begin{aligned} Dy &= 2x \\ Dx &= 3y \end{aligned} \tag{1}$$

0, lo que es igual,

$$\begin{aligned} 2x - Dy &= 0 \\ Dx - 3y &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Si aplicamos D a la primera de las ecuaciones (2) y multiplicamos por 2 la segunda, para luego restar, se elimina la x del sistema. Entonces

$$-D^2y + 6y = 0 \quad \text{o sea} \quad D^2y - 6y = 0.$$

Puesto que las raíces de la ecuación auxiliar son $m_1 = \sqrt{6}$ y $m_2 = -\sqrt{6}$, se obtiene

$$y(t) = c_1e^{\sqrt{6}t} + c_2e^{-\sqrt{6}t}. \tag{3}$$

Si multiplicamos por -3 la primera de las ecuaciones (2) y aplicamos D a la segunda para después sumar, llegamos a la ecuación diferencial $D^2x - 6x = 0$ en x. De inmediato resulta que

$$x(t) = c_3e^{\sqrt{6}t} + c_4e^{-\sqrt{6}t}. \tag{4}$$

Las ecuaciones (3) y (4) no satisfacen el sistema (1) para cualquier elección de c_1, c_2, c_3 y c_4. Sustituimos $x(t)$ y y(t) en la primera ecuación del sistema original (1) y, después de simplificar, el resultado es

$$(\sqrt{6}c_1 - 2c_3)e^{\sqrt{6}t} + (-\sqrt{6}c_2 - 2c_4)e^{-\sqrt{6}t} = 0.$$

Como la última expresión debe ser cero para todos los valores de t, se deben cumplir las condiciones

$$\sqrt{6}c_1 - 2c_3 = 0 \quad \text{y} \quad -\sqrt{6}c_2 - 2c_4 = 0$$

es decir,

$$c_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}c_1, \qquad c_4 = -\frac{\sqrt{6}}{2}c_2. \tag{5}$$

En consecuencia, una solución del sistema será

$$x(t) = \frac{\sqrt{6}}{2}c_1e^{\sqrt{6}t} - \frac{\sqrt{6}}{2}c_2e^{-\sqrt{6}t}$$
$$y(t) = c_1e^{\sqrt{6}t} + c_2e^{-\sqrt{6}t}.$$

El lector puede sustituir las ecuaciones (3) y (4) en la segunda de las expresiones (1), para comprobar que rige la misma relación, (5), entre las constantes.

EJEMPLO 2 Solución por eliminación

Resuelva

$$\begin{aligned} Dx + (D + 2)y &= 0 \\ (D - 3)x - 2y &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

SOLUCIÓN Al operar con $D - 3$ en la primera ecuación, con D en la segunda y restando, se elimina la x del sistema. Entonces, la ecuación diferencial para y es

$$[(D - 3)(D + 2) + 2D]y = 0 \quad \text{o sea} \quad (D^2 + D - 6)y = 0.$$

Dado que la ecuación característica de la ultima ecuación diferencial es $m^2 + m - 6 = (m - 2)(m + 3) = 0$, llegamos a la solución

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t}. \tag{7}$$

Eliminamos y en forma similar y vemos que $(D^2 + D - 6)x = 0$, de donde se obtiene

$$x(t) = c_3e^{2t} + c_4e^{-3t}. \tag{8}$$

Como hicimos notar en la descripción anterior, una solución de (6) no contiene cuatro constantes independientes, porque el sistema mismo establece una restricción en el numero de constantes que se puede elegir en forma arbitraria. Al sustituir los resultados (7) y (8) en la primera ecuación de (6), el resultado es

$$(4c_1 + 2c_3)e^{2t} + (-c_2 - 3c_4)e^{-3t} = 0.$$

De $4c_1 + 2c_3 = 0$, y $-c_2 - 3c_4 = 0$ se obtiene $c_3 = -2c_1$ y $c_4 = -\frac{1}{3}c_2$. En consecuencia, una solución del sistema es

$$x(t) = -2c_1e^{2t} - \frac{1}{3}c_2e^{-3t}$$
$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t}.$$

■

Como también pudimos despejar c_3 y c_4 en términos de c_1 y c_2, la solución del ejemplo 2 puede tener la forma alternativa

$$x(t) = c_3e^{2t} + c_4e^{-3t}$$
$$y(t) = -\frac{1}{2}c_3e^{2t} - 3c_4e^{-3t}.$$

Al resolver los sistemas de ecuaciones conviene fijarse bien en lo que se hace pues a veces se consiguen ventajas. Si hubiéramos resuelto primero para x, luego podríamos haber hallado y y la relación entre las constantes mediante la última ecuación de (6). El lector debe comprobar que sustituir x(t) en $y = \frac{1}{2}(Dx - 3x)$ da como resultado $y = -\frac{1}{2}c_3e^{2t} - 3c_4e^{-3t}$.

EJEMPLO 3 **Solución por eliminación**

Resuelva

$$x' - 4x + y'' = t^2$$
$$x' + x + y' = 0. \tag{9}$$

SOLUCIÓN Primero expresamos el sistema en notación de operadores diferenciales:

$$(D - 4)x + D^2y = t^2$$
$$(D + 1)x + Dy = 0. \tag{10}$$

A continuación eliminamos x y obtenemos

$$[(D + 1)D^2 - (D - 4)D]y = (D + 1)t^2 - (D - 4)0$$

o sea

$$(D^3 + 4D)y = t^2 + 2t.$$

Como las raíces de la ecuación auxiliar $m(m^2 + 4) = 0$ son $m_1 = 0$, $m_2 = 2i$ y $m_3 = -2i$, la función complementaria es

$$y_c = c_1 + c_2 \cos 2t + c_3 \operatorname{sen} 2t.$$

Para determinar la solución particular y_p aplicaremos el método de los coeficientes indeterminados, suponiendo que $y_p = At^2 + Bt + Ct$. Entonces

$$y_p' = 3At^2 + 2Bt + C, \quad y_p'' = 6At + 2B, \quad y_p''' = 6A,$$
$$y_p''' + 4y_p' = 12At^2 + 8Bt + 6A + 4C = t^2 + 2t.$$

La última igualdad implica que

$$12A = 1, \quad 8B = 2 \quad y \quad 6A + 4C = 0,$$

por lo que $A = \frac{1}{12}$, $B = \frac{1}{4}$ y $C = -\frac{1}{8}$. Así

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 \cos 2t + c_3 \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t. \tag{11}$$

Eliminamos y del sistema (10) y se llega a

$$[(D - 4) - D(D + 1)]x = t^2 \quad \text{o sea} \quad (D^2 + 4)x = -t^2.$$

Es obvio que

$$x_c = c_4 \cos 2t + c_5 \operatorname{sen} 2t$$

y que el método de los coeficientes indeterminados se puede aplicar para obtener una solución particular de la forma $x_p = At^2 + Bt + C$. En este caso, al diferenciar y efectuar operaciones ordinarias de álgebra, se llega a $x_p = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}$, así que

$$x = x_c + x_p = c_4 \cos 2t + c_5 \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}. \tag{12}$$

Ahora bien, c_4 y c_5 se pueden expresar en términos de c_2 y c_3 sustituyendo las ecuaciones (ll) y (12) en alguna de las ecuaciones (9). Si empleamos la segunda ecuación obtendremos, después de combinar los términos,

$$(c_5 - 2c_4 - 2c_2) \operatorname{sen} 2t + (2c_5 + c_4 + 2c_3) \cos 2t = 0$$

de modo que

$$c_5 - 2c_4 - 2c_2 = 0 \quad \text{y} \quad 2c_5 + c_4 + 2c_3 = 0.$$

Si despejamos c_4 y c_5 en términos de c_2 y c_3, el resultado es

$$c_4 = -\frac{1}{5}(4c_2 + 2c_3) \qquad \text{y} \qquad c_5 = \frac{1}{5}(2c_2 - 4c_3).$$

Finalmente se llega a una solución de (9), que es

$$x(t) = -\frac{1}{5}(4c_2 + 2c_3)\cos 2t + \frac{1}{5}(2c_2 - 4c_3)\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}$$
$$y(t) = c_1 + c_2\cos 2t + c_3\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t.$$

■

EJEMPLO 4 **Regreso a un modelo matemático**

Según la sección 3.3, el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden (3) describe las cantidades de libras de sal $x_1(t)$ y $x_2(t)$, en una **salmuera** que circula entre dos tanques. En aquella ocasión no pudimos resolver el sistema. Pero ahora lo haremos escribiendo el sistema en términos de operadores diferenciales:

$$\left(D + \frac{2}{25}\right)x_1 - \frac{1}{50}x_2 = 0$$
$$-\frac{2}{25}x_1 + \left(D + \frac{2}{25}\right)x_2 = 0.$$

Operamos la primera ecuación con $D + \frac{2}{25}$, multiplicamos la segunda por $\frac{1}{50}$, las sumamos y simplificamos. El resultado es

$$(625D^2 + 1000 + 3)x_1 = 0.$$

Formulamos la ecuación **auxiliar**, que es $625m^2 + 100m + 3 = (25m + 1)(25m + 3) = 0$, y vemos de inmediato que

$$x_1(t) = c_1e^{-t/25} + c_2e^{-3t/25}.$$

De igual forma llegamos a $(625D^2 + 1000 + 3)x_2 = 0$, así que

$$x_2(t) = c_3e^{-t/25} + c_4e^{-3t/25}.$$

Sustituimos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en, digamos, la primera ecuación del sistema y obtenemos

$$(2c_1 - c_3)e^{-t/25} + (-2c_2 - c_4)e^{-3t/25} = 0.$$

De acuerdo con esta ecuación, $c_3 = 2c_1$ y $c_4 = -2c_2$. Entonces, una solución del sistema es

$$x_1(t) = c_1e^{-t/25} + c_2e^{-3t/25}$$
$$x_2(t) = 2c_1e^{-t/25} - 2c_2e^{-3t/25}.$$

En la descripción original supusimos que las condiciones iniciales eran $x_1(0) = 25$ y $x_2(0) = 0$. Aplicamos esas condiciones a la solución, por lo que $c_1 + c_2 = 25$ y $2c_1 - 2c_2 = 0$. Al resolver simultáneamente esas ecuaciones, llegamos a $c_1 = c_2 = \frac{25}{2}$. Así tenemos una solución del problema de valor inicial:

$$x_1(t) = \frac{25}{2}e^{-t/25} + \frac{25}{2}e^{-3t/25}$$
$$x_2(t) = 25e^{-t/25} - 25e^{-3t/25}.$$

■

Uso de determinantes Si L_1, L_2, L_3 y L_4 representan operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes, es factible escribir un sistema de ecuaciones diferenciales lineales en las dos variables x y y como sigue:

$$\begin{aligned} L_1x + L_2y &= g_1(t) \\ L_3x + L_4y &= g_2(t). \end{aligned} \tag{13}$$

Eliminamos variables, como lo haríamos en las ecuaciones algebraicas, y tenemos

$$(L_1L_4 - L_2L_3)x = f_1(t) \quad \text{y} \quad (L_1L_4 - L_2L_3)y = f_2(t), \tag{14}$$

en donde

$$f_1(t) = L_4g_1(t) - L_2g_2(t) \quad \text{y} \quad f_2(t) = L_1g_2(t) - L_3g_1(t).$$

Los resultados de (14) se pueden expresar formalmente en términos de determinantes **análogos** a los que se usan en la regla de Cramer:

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} g_1 & L_2 \\ g_2 & L_4 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} L_1 & g_1 \\ L_3 & g_2 \end{vmatrix} \tag{15}$$

El determinante del lado izquierdo de cada una de las ecuaciones (15) se puede desarrollar en el sentido algebraico usual y el resultado opera sobre las funciones $x(t)$ y $y(t)$. Sin embargo, hay que tener cuidado al desarrollar los determinantes del lado derecho de las ecuaciones (15). Se deben desarrollar cuidando que operadores diferenciales internos actúen realmente sobre las funciones $g_1(t)$ y $g_2(t)$.

Si $$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} \neq 0$$

en (15) y es un operador diferencial de orden n, entonces

- El sistema (13) se puede descomponer y formar dos ecuaciones diferenciales de orden nenxyy.
- Las ecuaciones características y, por lo tanto las funciones complementarias de esas ecuaciones diferenciales, son iguales.
- Como x y y contienen ■ constantes cada una, aparece un total de 2n constantes.
- La cantidad total de constantes ***independientes*** en la solución del sistema es ***n.***

Si $$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} = 0$$

en (13), el sistema puede tener una solución que contiene cualquier cantidad de constantes independientes e incluso carecer de solución. Observaciones análogas se aplican a sistemas mayores que el de las ecuaciones (13).

EJEMPLO 5 **Solución con determinantes**

Resuelva
$$\begin{aligned} x' &= 3x - y - 12 \\ y' &= x + y + 4e^t. \end{aligned} \tag{16}$$

SOLUCIÓN Escribimos el sistema en notación de operadores diferenciales:

$$\begin{aligned} (D - 3)x + \quad y &= -12 \\ -x + (D - 1)y &= 4e^t. \end{aligned}$$

Aplicamos los determinantes

$$\begin{vmatrix} D-3 & 1 \\ -1 & D-1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} -12 & 1 \\ 4e^t & D-1 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} D-3 & 1 \\ -1 & D-1 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} D-3 & -12 \\ -1 & 4e^t \end{vmatrix}$$

Desarrollamos y llegamos a

$$(D - 2)^2 x = 12 - 4e^t \quad \text{y} \quad (D - 2)^2 y = -12 - 8e^t.$$

Entonces, con los métodos usuales,

$$x = x_c + x_p = c_1 e^{2t} + c_2 te^{2t} + 3 - 4e^t \tag{17}$$
$$y = y_c + y_p = c_3 e^{2t} + c_4 te^{2t} - 3 - 8e^t. \tag{18}$$

Sustituimos estas expresiones en la segunda de las ecuaciones (16), y obtenemos

$$(c_3 - c_1 + c_4)e^{2t} + (c_4 - c_2)te^{2t} = 0,$$

de donde $c_4 = c_2$ y $c_3 = c_1 - c_4 = c_1 - c_2$. Así, una solución de las ecuaciones (16) es

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{2t} + c_2 te^{2t} + 3 - 4e^t \\ y(t) &= (c_1 - c_2)e^{2t} + c_2 te^{2t} - 3 - 8e^t. \end{aligned}$$

■

EJERCICIOS 4.8

De ser posible resuelva cada sistema de ecuaciones diferenciales en los problemas 1 a 22 mediante eliminación sistemática o por determinantes.

1. $\dfrac{dx}{dt} = 2x - y$

$\dfrac{dy}{dt} = x$

2. $\dfrac{dx}{dt} = 4x + 7y$

$\dfrac{dy}{dt} = x - 2y$

3. $\dfrac{dx}{dt} = -y + t$

$\dfrac{dy}{dt} = x - t$

4. $\dfrac{dx}{dt} - 4y = 1$

$x + \dfrac{dy}{dt} = 2$

5. $(D^2 + 5)x - 2y = 0$

$-2x + (D^2 + 2)y = 0$

6. $(D + 1)x + (D - 1)y = 2$

$3x + (D + 2)y = -1$

7. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 4y + e^t$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} = 4x - e^t$

8. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} = -5x$

$\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y$

9. $Dx + D^2y = e^{3t}$

$(D + 1)x + (D - 1)y = 4e^{3t}$

10. $D^2x - Dy = t$

$(D + 3)x + (D + 3)y = 2$

11. $(D^2 - 1)x - y = 0$

$(D - 1)x + Dy = 0$

12. $(2D^2 - D - 1)x - (2D + 1)y = 1$

$(D - 1)x + Dy = -1$

13. $2\dfrac{dx}{dt} - 5x + \dfrac{dy}{dt} = e^t$

$\dfrac{dx}{dt} - x + \dfrac{dy}{dt} = 5e^t$

14. $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = e^t$

$-\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} + x + y = 0$

15. $(D - 1)x + (D^2 + 1)y = 1$

$(D^2 - 1)x + (D + 1)y = 2$

16. $D^2x - 2(D^2 + D)y = \operatorname{sen} t$

$x + Dy = 0$

17. $Dx = y$

$Dy = z$

$Dz = x$

18. $Dx + z = e^t$

$(D - 1)x + Dy + Dz = 0$

$x + 2y + Dz = e^t$

19. $\dfrac{dx}{dt} - 6y = 0$

$x - \dfrac{dy}{dt} + z = 0$

$x + y - \dfrac{dz}{dt} = 0$

20. $\dfrac{dx}{dt} = -x + z$

$\dfrac{dy}{dt} = -y + z$

$\dfrac{dz}{dt} = -x + y$

21. $2Dx + (D - 1)y = t$

$Dx + Dy = t^2$

22. $Dx - 2Dy = t^2$

$(D + 1)x - 2(D + 1)y = 1$

En los problemas 23 y 24 resuelva el sistema respectivo, sujeto a las condiciones iniciales indicadas.

23. $\dfrac{dx}{dt} = -5x - y$

$\dfrac{dy}{dt} = 4x - y; \quad x(1) = 0, \; y(1) = 1$

24. $\dfrac{dx}{dt} = y - 1$

$\dfrac{dy}{dt} = -3x + 2y; \quad x(0) = 0, \; y(0) = 0$

25. Un cañón dispara un proyectil cuyo peso es w = mg y cuya velocidad v es tangente a su trayectoria. Sin tener en cuenta la resistencia del aire y demás fuerzas, salvo su peso, formule un sistema de ecuaciones diferenciales que describa el movimiento (Fig. 4.6). Resuelva ese sistema. [Sugerencia: emplee la segunda ley de Newton del movimiento en las direcciones x y y.]

26. Deduzca un sistema de ecuaciones diferenciales que describa el movimiento del problema 2.5, si el proyectil se encuentra con una fuerza de retardo k (de magnitud kv), que obra tangente a la trayectoria, pero opuesta al movimiento (Fig. 4.7). Resuelva ese sistema. [Sugerencia: k es un múltiplo de la velocidad, es decir, cv.]

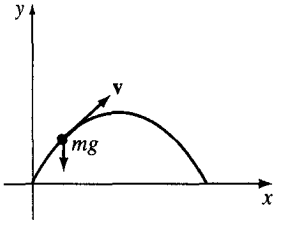


FIGURA 4.6

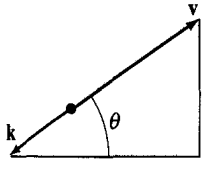


FIGURA 4.7

4.9 ECUACIONES NO LINEALES

■ *Algunas diferencias entre las ecuaciones diferenciales lineales y no lineales*
■ *Solución por sustitución* ■ *Empleo de series de Taylor* ■ *Empleo de programas ODE solver*
■ *Ecuaciones* autónomas

Entre las ecuaciones diferenciales lineales y no lineales hay varias diferencias importantes. En la sección 4.1 expusimos que las ecuaciones lineales homogéneas de orden dos o superior tienen la propiedad de que una combinación lineal de soluciones también es una solución (teorema 4.2). Las ecuaciones no lineales carecen de esta propiedad de superposición; por ejemplo, en el intervalo $(-\infty, \infty)$, $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = \cos x$ y $y_4 =$ sen x son cuatro soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial no lineal de segundo orden $(y'')^2 - y^2 = 0$. Pero las combinaciones lineales, como $y = c_1e^x + c_3 \cos$ x, $y = c_2e^{-x} + c_4$ sen x y $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3 \cos$ x + c_4 sen x, no son soluciones de la ecuación para constantes c_i arbitrarias distintas de cero (véase el problema 1 en los ejercicios 4.9.)

En el capítulo 2 señalamos que se pueden resolver algunas ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden, si son exactas, separables, homogéneas o quizá de Bernoulli. Aun cuando las soluciones estaban en forma de una familia a un parámetro, esta familia no representaba invariablemente la solución general de la ecuación diferencial. Por otra parte, al poner atención en ciertas condiciones de continuidad obtuvimos soluciones generales de ecuaciones lineales de primer orden. Dicho de otra manera, las ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden pueden tener soluciones singulares, mientras que las ecuaciones lineales no. Pero la diferencia principal entre las ecuaciones lineales y no lineales de segundo orden o mayor es la posibilidad de resolverlas. Dada una ecuación lineal, hay la posibilidad de establecer alguna forma manejable de solución, como una solución explícita o una que tenga la forma de una serie infinita. Por otro lado, la solución de las ecuaciones diferenciales no lineales de orden superior es todo un desafio. Esto no quiere decir que una ecuación diferencial no lineal de orden superior no tenga solución, sino más bien que no hay métodos generales para llegar a una solución explícita o implícita. Aunque esto parece desalentador, hay algunas cosas que se pueden hacer. Siempre es factible analizar cuantitativamente una ecuación no lineal (aproximar una solución con un procedimiento numérico, **graficar** una solución con un *ODE solver*), o cualitativamente.

Para empezar, aclaremos que las ecuaciones diferenciales no lineales de orden superior son importantes -incluso más que las lineales-, porque a medida que se afina un modelo matemático (por ejemplo, el de un sistema físico) se aumenta la posibilidad de que ese modelo sea no lineal.

Comenzaremos ejemplificando un método de sustitución que a veces permite determinar las soluciones explícitas o implícitas de tipos especiales de ecuaciones no lineales.

Uso de sustituciones Las ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden $F(x, y', y'') = 0$ en que falta la variable dependiente y, y las $F(y, y', y'') = 0$ donde falta la variable **independiente** x, se pueden reducir a ecuaciones de primer orden mediante la sustitución $u = y'$.

El ejemplo 1 muestra la técnica de sustitución para una ecuación tipo $F(x, y', y'') = 0$. Si $u = y'$, la ecuación diferencial se transforma en $F(x, u, u') = 0$. Si resolvemos esta última ecuación podremos determinar y por integración. Dado que estamos resolviendo una ecuación de segundo orden, su solución tendrá dos constantes arbitrarias.

EJEMPLO 1 **Falta la variable dependiente y**

Resuelva $y'' = 2x(y')^2$.

SOLUCIÓN Si $u = y'$, entonces $du/dx = y''$. Después de sustituir, la ecuación de segundo orden se reduce a una de primer orden con variables separables; la variable independiente es x y la variable dependiente es u:

$$\frac{du}{dx} = 2xu^2 \qquad \text{o sea} \qquad \frac{du}{u^2} = 2x\,dx$$

$$\int u^{-2}\,du = \int 2x\,dx$$

$$-u^{-1} = x^2 + c_1^2.$$

Por comodidad, la constante de integración se expresa como c_1^2. En los próximos pasos se aclarará la razón. Como $u^{-1} = 1/y'$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2 + c_1^2},$$

y así $$y = -\int \frac{dx}{x^2 + c_1^2} \quad \text{o bien} \quad y = -\frac{1}{c_1}\tan^{-1}\frac{x}{c_1} + c_2.$$ ■

A continuación mostraremos la forma de resolver una ecuación de la forma $F(y, y', y'') = 0$. De nuevo haremos $u = y'$, pero como falta la variable independiente x, usaremos esa sustitución para transformar la ecuación diferencial en una en que la variable independiente sea y y la dependiente sea u. Con este fin usaremos la regla de la cadena para determinar la segunda derivada dey:

$$y'' \frac{dudu}{d\ x} \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy}.$$

Ahora, la ecuación de primer orden que debemos resolver es $F(y, u, u\ du/dy) = 0$.

EJEMPLO 2 **Falta la variable independiente x**

Resolver $yy'' = (y')^2$.

SOLUCIÓN Con la ayuda de $u = y'$ y de la regla de la cadena que mostramos arriba, la ecuación diferencial se transforma en

$$y\left(u\frac{du}{dy}\right) = u^2 \quad \text{o sea} \quad \frac{du}{u} = \frac{dy}{y}.$$

Partimos de $$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dy}{y} \quad \text{obtenemos} \quad \ln|u| = \ln|y| + c_1.$$

Al despejar u de la última ecuación en función de y, obtenemos $u = c_2 y$, en donde hemos redefinido la constante $\pm e^{c_1}$ como c_2. A continuación restituimos $u = dy/dx$, separamos variables, integramos y de nuevo redefinirnos las constantes:

$$\int \frac{dy}{y} = c_2 \int dx \ \text{o sea}\ \ln|y| = c_2 x + c_3 \ \text{o sea}\ y = c_4 e^{c_2 x}.$$ ■

Uso de la serie de Taylor En algunos casos se puede aproximar una solución a un problema de valor inicial en que las condiciones iniciales se especifiquen en x_0 mediante una serie de Taylor centrada en x_0.

EJEMPLO 3 **Solución de un problema de valor inicial con una serie de Taylor**

Supongamos que existe una solución del problema de valor inicial

$$y'' = x + y - y^2, \qquad y(0) = -1,\ y'(0) = 1 \qquad \textbf{(1)}$$

Si además suponemos que la solución y(x) del problema es analítica en 0, entonces y(x) tiene un desarrollo en serie de Taylor centrado en 0:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(iv)}(0)}{4!}x^4 + \frac{y^{(v)}(0)}{5!}x^5 + \cdots. \quad (2)$$

Nótese que los valores del primero y segundo términos en la serie (2) son conocidos, ya que se establecen en las condiciones iniciales y(O) = -1, y'(O) = 1. Además, la misma ecuación diferencial **define** el valor de la segunda derivada en 0: y"(O) = 0 + y(O) $-y(0)^2 =$ 0 + (-1) $-(-1)^2$ = -2. A continuación se pueden determinar expresiones para las derivadas superiores y''', $y^{(iv)}$, . . , calculando las derivadas sucesivas de la ecuación diferencial:

$$y'''(x) = \frac{d}{dx}(x + y - y^2) = 1 + y' - 2yy' \quad (3)$$

$$y''''(X) = \frac{d}{dx}(1 + y' - 2yy') = y'' - 2yy'' - 2(y')^2 \quad (4)$$

$$y^{(v)}(x) = \frac{d}{dx}(y'' - 2yy'' - 2(y')^2) = y''' - 2yy''' - 6y'y'' \quad (5)$$

etc. Sustituimos $y(0)$ = -1 y y'(O) = 1 y vemos, de acuerdo con (3), que y"'(O) = 4. Con base en los valores $y(0)$ = -1, y'(O) = 1 y y"(O) = -2, determinamos $y^{(iv)}(0)$ = -8 con la ecuación (4). Con la información adicional de que y"'(O) = 4 aplicamos la ecuación (5) y llegamos a $y^{(v)}(0)$ = 24. Entonces, según (2), los seis primeros términos de una **solución** en serie del problema de valores iniciales (1) son

$$y(x) = -1 + x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots. \quad \blacksquare$$

Empleo de un programa *ODE solver* Es posible examinar la ecuación del ejemplo 3 usando un *ODE solver*. En la mayor parte de los programas de cómputo, a fm de examinar **numéricamente** una **ecuación** diferencial de orden superior se necesita expresar la ecuación diferencial en forma de un sistema de ecuaciones. Para aproximar la curva de solución de un problema de valores iniciales de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y'), \qquad Y(x_0) = Y_0, \quad y'(x_0) = Y_1$$

se sustituye dy/dx = u y entonces $d^2y/dx^2 = du/dx$. La ecuación de segundo orden se transforma en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, en las variables dependientes y y u:

$$\frac{dy}{dx} = u$$

$$\frac{du}{dx} = f(x, y, u)$$

cuyas condiciones iniciales son $y(x_0) = y_0$, $u(x_0) = y_1$.

EJEMPLO 4 **Análisis gráfico del ejemplo 3**

De acuerdo con el procedimiento anterior, el problema de valores iniciales de segundo orden, del ejemplo 3, equivale a

$$\frac{dy}{dx} = u$$

$$\frac{du}{dx} = x + y - y^2$$

cuyas condiciones iniciales son $y(0) = -1$, $u(0) = 1$. Con ayuda de estos programas se obtiene la curva solución que aparece en gris en la figura 4.8. Para comparar se muestra también la curva en negro del polinomio de Taylor de quinto grado $T_5(x) = -1 + x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^5$. Aunque no conocemos el intervalo de convergencia de la serie de Taylor que obtuvimos en el ejemplo 3, la cercanía de las dos curvas en la vecindad del origen sugiere la posibilidad de convergencia de la serie en el intervalo (-1, 1). ■

La gráfica en gris de la figura 4.8 origina algunas preguntas cualitativas: ¿La solución del problema original de valor inicial cuando $x \to \infty$ es oscilatoria? La gráfica, generada con un programa en el intervalo más grande de la figura 4.9 parecería *sugerir* que la respuesta es sí. Pero este solo ejemplo por sí solo, o hasta un conjunto de ejemplos, no contesta la pregunta básica de si *todas* las soluciones de la ecuación diferencial $y'' = x + y - y^2$ son de naturaleza oscilatoria. También, ¿qué sucede con la curva de solución en la figura 4.8 cuando x está cerca de -1? ¿Cuál es el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial cuando $x \to \infty$? En general, ¿las soluciones son acotadas cuando $x \to \infty$? Preguntas como las anteriores

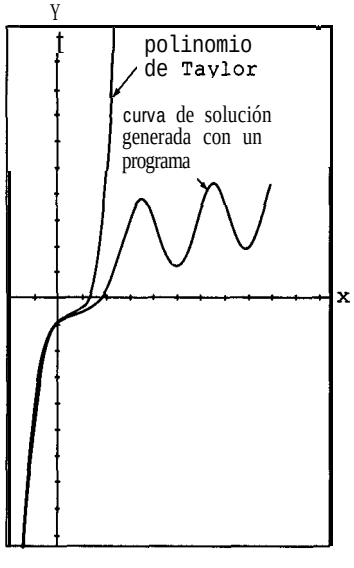


FIGURA 4.8 Comparación de dos soluciones aproximadas

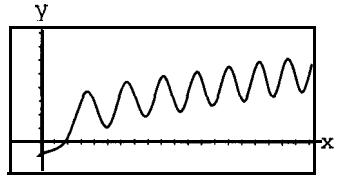


FIGURA 4.9

no tienen respuesta fácil cuando se trata de ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden, pero algunos tipos de estas ecuaciones se prestan a un **análisis** cualitativo sistemático. Las ecuaciones no lineales de segundo orden de la forma

$$F(y, y', y'') = 0 \qquad \text{o sea} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f(y, y')$$

(esto es, ecuaciones diferenciales sin dependencia explícita de la variable independiente x) se llaman **autónomas.** La **ecuación** diferencial del ejemplo 2 es autónoma; la ecuación del ejemplo 3 es no **autónoma.**

EJERCICIOS 4.9

En los problemas 1 y 2 compruebe que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial dada, pero que $y = c_1y_1 + c_2y_2$ no lo es, en general.

1. $(y'')^2 = y^2$; $y_1 = e^x$, $y_2 = \cos x$ **2.** $yy'' = \frac{1}{2}(y')^2$; $y_1 = 1$, $y_2 = x^2$

Resuelva la ecuación diferencial correspondiente a cada uno de los problemas 3 a 8, con la sustitución $u = y'$.

3. y" + (y')" + 1 = 0 **4.** $y'' = 1 + (y')$"

5. $x^2y'' + (y')' = 0$ **6.** $(y + 1)y'' = (y')^2$

7. $y'' + 2y(y')^3 = 0$ 8. $y^2y'' = y'$

9. Determine la solución del problema de valor inicial

$$y'' + yy' = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Use un programa *ODE solver* para **graficar** la curva de solución. Trace la solución **explícita** con una calculadora graficadora. Determine un **intervalo** de validez de la **solución.**

10. Establezca dos soluciones al problema de valor inicial

$$(y')^2 + (y)^2 = 1, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Use un *ODE solver* para trazar las curvas solución.

En los problemas 11 y 12, demuestre que la sustitución $u = y'$ conduce a una **ecuación** de Bernoulli. Resuelva esa ecuación (**véase Sec.** 2.4).

11. $xy'' = y' + (y')^3$ **12.** $xy'' = y' + x(y')^2$

En los problemas 13 a 16 proceda como en el ejemplo 3 para obtener los seis primeros **términos** distintos de cero de una solución en serie de Taylor, centrada en 0, del problema respectivo de

valor inicial. Use un *ODE solver* y una calculadora graficadora para comparar la curva solución y la gráfica del polinomio de Taylor.

13. $y'' = x + y^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

14. $y'' + y^2 = 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$

15. $y'' = x^2 + y^2 - 2y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

16. $y'' = e^y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$

17. En cálculo diferencial, la curvatura de una curva representada por $y = f(x)$ se define como sigue:

$$\kappa = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Determine una función, $y = f(x)$, para la cual $\kappa = 1$. *[Sugerencia:* por simplicidad, no tenga en cuenta las constantes de integración.]

18. Un modelo matemático de la posición, x(t), de un cuerpo con movimiento rectilíneo en el eje x dentro de un campo de fuerzas que varían con la inversa del cuadrado de la distancia es

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2}{x^2}.$$

Suponga que cuando $t = 0$, el cuerpo parte del reposo en la posición $x = x_0$, $x_0 > 0$. Demuestre que la velocidad del objeto en cualquier momento está definida por

$$\frac{v^2}{2} = k^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right).$$

Use esa ecuación en un sistema algebraico de computación para llevar a cabo la integración y expresar al tiempo t en función de x.

Problemas poro discusión

19. Un modelo matemático de la posición, $x(t)$, de un objeto en movimiento es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \operatorname{sen} x = 0.$$

Use un *ODE solver* a fm de investigar las soluciones de la ecuación, sujetas a x(O) = 0, x'(O) = β, $\beta \geq 0$. Describa el movimiento del objeto cuando $t \geq 0$ y para diversos valores de β. Investigue la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \operatorname{sen} x = 0$$

del mismo modo. Describa una interpretación física posible del término dx/dt.

20. Vimos que sen x, cos x, e^x y e^{-x} son cuatro soluciones de la ecuación no lineal $(y'')^2 - y^2 = 0$. Sin tratar de resolverla, describa cómo determinar estas soluciones explícitas con nuestros

conocimientos acerca de las ecuaciones lineales. Sin tratar de comprobar, describa por qué las dos combinaciones lineales especiales, y = $c_1e^x + c_2e^{-x}$ y $y_2 = c_3 \cos x + c_4$ sen x, deben satisfacer la ecuación diferencial.

Ejercicios de repaso

Resuelva los problemas 1 a 10 sin consultar el texto. Llene el espacio en blanco o conteste cierto o falso. En algunos casos quizás haya más de una respuesta correcta.

1. La solución única dey" + $x^2y = 0$, $y(0) = 0$, y'(O) = 0 es _____
2. Si dos funciones diferenciables, $f_1(x)$ y $f_2(x)$, son linealmente independientes en un intervalo, $W(f_1(x), f_2(x)) \neq 0$ para cuando menos un punto en el intervalo. _____
3. Dos funciones, $f_1(x)$ y $f_2(x)$, son linealmente independientes en un intervalo si una no es múltiplo constante de la otra. _____
4. Las funciones $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 1 - x^2$ y $f_3(x) = 2 + x^2$ son linealmente _____ en el intervalo $(-\infty, \infty)$.
5. Las funciones $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) =$ xx son linealmente independientes en el intervalo _____ y lineahnente dependientes en el intervalo _____
6. Dos soluciones, y_1 y y_2, de y" + y' + y = 0 son linealmente dependientes si $W(y_1, y_2) = 0$ para todo valor real de x. _____
7. Un múltiplo constante de una solución de una ecuación diferencial también es una solución. _____
8. Existe un conjunto fundamental de dos soluciones de (x − 2)$y'' + y$ = 0 en cualquier intervalo que no contenga al punto _____
9. Para el método de los coeficientes indeterminados, la forma supuesta de la solución particular, y_p, dey" − y = 1 + e^x es _____
10. Un operador diferencial que anula a $e^{2x}(x$ + sen x) es _____

En los problemas ll y 12 determine una segunda solución de la ecuación diferencial, si $y_1(x)$ es la primera solución.

ll. $y'' + 4y = 0$, $y_1 = \cos 2x$

12. $xy'' - 2(x + 1)y' + (x + 2)y = 0$, $y_1 = e^x$

En los problemas 13 a 20 determine la solución general de cada ecuación diferencial.

13. $y'' - 2y' - 2y = 0$

14. $2y'' + 2y' + 3y = 0$

15. $y''' + 10y'' + 25y' = 0$

16. $2y''' + 9y'' + 12y' + 5y = 0$

17. $3y''' + 10y'' + 15y' + 4y = 0$

18. $2\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} - 4y = 0$

19. $6x^2y'' + 5xy' - y = 0$

20. $2x^3y''' + 19x^2y'' + 39xy' + 9y = 0$

En los problemas 21 a 24 resuelva cada ecuación, con el método de los coeficientes indeterminados.

21. $y'' - 3y' + 5y = 4x3 - 2x$ 22. $y'' - 2y' + y = x^2e^x$

23. $y''' - 5y'' + 6y' = 2\operatorname{sen} x + 8$ 24. $y''' - y'' = 6$

En los problemas 25 a 28 resuelva la ecuación diferencial correspondiente sujeta a las condiciones iniciales indicadas.

25. $y'' - 2y' + 2y = 0$, $\emptyset\ \frac{\pi}{2} = 0$, y(a) = -1

26. $y'' - y = x + \operatorname{sen} x$, $y(0) = 2$, y'(O) = 3

27. $y'y'' = 4x$, $y(1) = 5$, y'(l) = 2

28. $2y'' = 3y^2$, $y(0) = 1$, y'(O) = 1

Resuelva cada ecuación de los problemas 29 a 32 aplicando el método de variación de parámetros.

29. $y'' - 2y' + 2y = e^x \tan x$

30. $y'' - y = \dfrac{2e^x}{e^x + e^{-x}}$

31. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 2x^4 + x^2$

32. $x^2y'' - xy' + y = x^3$

En los problemas 33 y 34 resuelva la ecuación diferencial respectiva sujeta a las condiciones iniciales indicadas.

33. $(203 - 13D^2 + 240 - 9)y = 36$, $y(0) = -4$, $y'(O) = 0$, $y''(O) = \frac{5}{2}$

34. $y'' + y = \sec^3 x$, $y(0) = 1$, y'(O) = $\frac{1}{2}$

En los problemas 35 a 38 aplique el método de eliminación sistemática o el de determinantes para resolver ca& uno de los sistemas.

35.
$$x' + y' = 2x + 2y + 1$$
$$x' + 2y' = y + 3$$

36.
$$\frac{dx}{dt} = 2x + y + t - 2$$
$$\frac{dy}{dt} = 3x + 4y - 4t$$

37.
$$(D - 2)x - y = -e^t$$
$$-3x + (D - 4)y = -7e^t$$

38.
$$(D + 2)x + (D + 1)y = \operatorname{sen} 2t$$
$$5x + (D + 3)y = \cos 2t$$

CAPÍTULO

5

MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

5.1 Ecuaciones lineales: problemas de valor inicial
- **5.1.1** Sistemas de resorte y masa: movimiento libre no amortiguado
- 5.1.2 Sistemas de resorte y masa: movimiento amortiguado libre
- 5.1.3 Sistemas de resorte y masa: movimiento forzado
- 5.1.4 Sistemas análogos

5.2 Ecuaciones lineales: problemas de valores en la Contera

5.3 Ecuaciones no lineales

Ejercicios de repaso

INTRODUCCIÓN

Hemos visto que una sola ecuación diferencial puede servir como modelo matemático de distintos fenómenos. Por este motivo, en la sección 5.1 examinaremos con mayor detalle una aplicación, el movimiento de una masa unida a un resorte. Aparte de la terminología y las interpretaciones físicas de los cuatro términos de la ecuación lineal $ay'' + by' + cy = g(t)$, veremos que los procedimientos matemáticos para manejar, por ejemplo, un circuito eléctrico en serie son idénticos a los que se emplean en un sistema vibratorio de resorte y masa. Las formas de esta ecuación diferencial de segundo orden surgen en el análisis de problemas en muchas y diversas áreas de la ciencia y la ingeniería. En la sección 5.1 sólo estudiaremos problemas de valor inicial. En la sección 5.2 examinaremos aplicaciones descritas por problemas de valores en la frontera, además de algunos de los problemas que nos conducen a los conceptos de valores **propios y funciones propias.** La sección 5.3 se inicia con una descripción de las diferencias entre los resortes lineales y no lineales, y luego se demuestra cómo el péndulo simple y un alambre suspendido nos llevan a modelos no lineales.

5.1 ECUACIONES LINEALES: PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

■ *Sistema lineal dinámico* ■ Ley *de Hooke* ■ *Segunda ley de Newton del movimiento* ■ *Sistema de resorte y masa* ■ *Movimiento libre no amortiguado* ■ *Movimiento armónico simple* ■ *Ecuación del movimiento* ■ *Amplitud* ■ *Ángulo de fase* ■ *Resorte desgastable* ■ *Movimiento libre amortiguado* ■ *Movimiento forzado* ■ *Términos transitorios y de estado estable* ■ *Resonancia pura* ■ *Circuitos* en serie

En esta sección revisaremos varios sistemas **dinámicos** lineales (pág. 127) en donde cada modelo matemático es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes

$$a_2\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0y = g(t).$$

No olvidemos que la función **g es** la **entrada (función de entrada o función forzada)** del sistema. La **salida o respuesta** del sistema es una solución de la ecuación diferencial en un intervalo que contiene a t_0 que satisface las condiciones iniciales prescritas $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$.

5.1.1 Sistemas de resorte y masa: movimiento libre no amortiguado

Ley de Hooke Supongamos que, como en la figura 5.1(b), una masa m_1 está unida a un resorte flexible colgado de un soporte rígido. Cuando se reemplaza m_1 con una masa distinta m_2, el estiramiento, elongación o alargamiento del resorte cambiará.

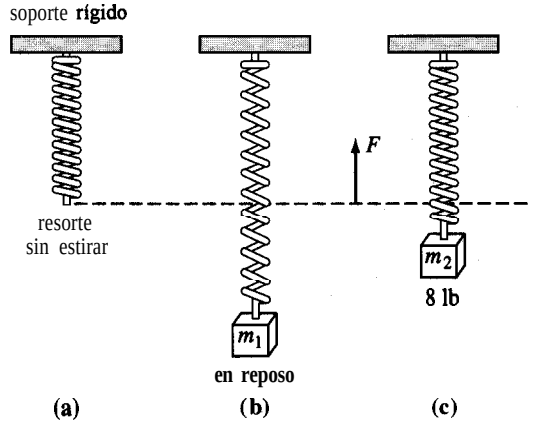


FIGURA 5.1

Según la ley de Hooke, el resorte mismo ejerce una fuerza de restitución, F, opuesta a la dirección del alargamiento y proporcional a la cantidad de alargamiento s. En concreto, $F = ks$, donde k es una constante de proporcionalidad llamada **constante del resorte.** Aunque las masas con distintos pesos estiran un resorte en cantidades distintas, éste está caracterizado

esencialmente por su numero k; por ejemplo, si una masa que pesa 10 libras estira $\frac{1}{2}$ pie un resorte, entonces $10 = k(\frac{1}{2})$ implica que $k = 20$ lb/ft. Entonces, necesariamente, una masa cuyo peso sea de 8 libras estirará el resorte $\frac{2}{5}$ de pie.

Segunda ley de Newton Después de unir una masa m a un resorte, ésta lo estira una longitud s y llega a una posición de equilibrio, en la que su peso, W, está equilibrado por la fuerza de restauración ks. Recuérdese que el peso se define por $W = mg$, donde la masa se expresa en slugs, kilogramos o gramos y g = 32 ft/s^2, 9.8 m/s^2 o 980 cm/s^2, respectivamente. Como se aprecia en la figura 5.2(b), la condición de equilibrio es $mg = ks$ o $mg - ks = 0$. Si la masa se desplaza una distancia x respecto de su posición de equilibrio, la fuerza de restitución del resorte es $k(x + s)$. Suponiendo que no hay fuerzas de retardo que actúen sobre el sistema y que la masa se mueve libre de otras fuerzas externas **(movimiento libre),** entonces podemos igualar la segunda ley de Newton con la fuerza neta, o resultante, de la fuerza de restitución y el peso:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(s + x) + mg = \underbrace{-kx + mg - ks}_{\text{cero}} = -kx. \tag{1}$$

El signo negativo de la ecuación (1) indica que la fuerza de restitución del resorte actúa en la dirección opuesta del movimiento. Además, podemos adoptar la convención que los desplazamientos medidos abajo de la posición de equilibrio son positivos (Fig. 5.3).

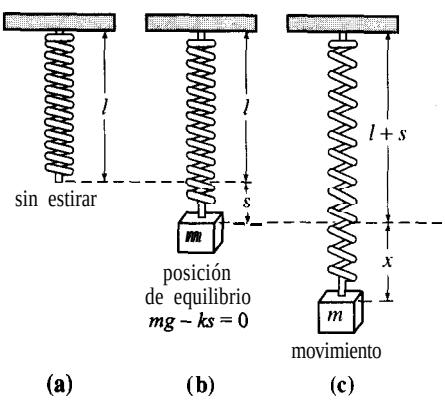


FIGURA 5.2

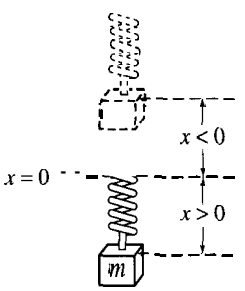


FIGURA 5.3

Ecuación diferencial del movimiento libre no amortiguado Si dividimos la ecuación (1) por la masa m, obtendremos la ecuación diferencial de segundo orden $d^2x/dt^2 + (k/m)x = 0$, o sea

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{2}$$

donde $\omega^2 = k/m$. Se dice que la ecuación (2) describe **el movimiento armónico simple o movimiento libre no amortiguado.** Dos condiciones iniciales obvias asociadas con (2) son

x(O) = α, la cantidad de desplazamiento inicial, y x'(O) = β, la velocidad inicial de la masa. Por ejemplo, si $\alpha > 0$, $\beta < 0$, la masa parte de un punto *abajo* de la posición de equilibrio con una velocidad *hacia arriba*. Si $\alpha < 0$, $\beta = 0$, la masa se suelta partiendo del *reposo* desde un punto ubicado $|\alpha|$ unidades *arriba* de la posición de equilibrio, etcétera.

Solución y ecuación del movimiento Para resolver la ecuación (2) observemos que las soluciones de la ecuación auxiliar $m^2 + \omega^2 = 0$ son los números complejos $m_1 = wi$, $m_2 = -\omega i$. Así, según (8) de la sección 4.3, la solución general de (2) es

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t. \tag{3}$$

El **periodo** de las vibraciones libres que describe (3) es $T = 2\pi/\omega$, y la **frecuencia es** $f = 1/T = \omega/2\pi$. Por ejemplo, para $x(t) = 2 \cos 3t - 4 \operatorname{sen} 3t$, el periodo es $2\pi/3$ y la frecuencia es $3/2\pi$. El número anterior indica que la gráfica de $x(t)$ se repite cada $2\pi/3$ unidades y el ultimo numero indica que hay tres ciclos de la gráfica cada 27r unidades o, lo que es lo mismo, que la masa pasa por $3/2\pi$ vibraciones completas por unidad de tiempo. Además, se puede demostrar que el periodo $2\pi/\omega$ es el intervalo entre dos máximos sucesivos de $x(t)$. Téngase en mente que un máximo de x(t) es el desplazamiento positivo cuando la masa alcanza la distancia **máxima** *abajo* de la posición de equilibrio, mientras que un mínimo de $x(t)$ es el desplazamiento negativo cuando la masa llega a la altura máxima *arriba* de esa posición. Ambos casos se denominan **desplazamiento extremo** de la masa. Por último, cuando se emplean las condiciones iniciales para determinar las constantes c_1 y c_2 en la ecuación (3), se dice que la solución particular que resulta **es** la **ecuación del movimiento.**

EJEMPLO 1 **Interpretación de un problema de valor inicial**

Resuelva e interprete el problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0, \qquad x(0) = 10, \qquad x'(0) = 0.$$

SOLUCIÓN El problema equivale a tirar hacia **abajo una** masa unida a un resorte 10 unidades de longitud respecto de la posición de equilibrio, sujetarla hasta que $t = 0$ y soltarla desde el reposo en ese instante. Al aplicar las condiciones iniciales a la solución

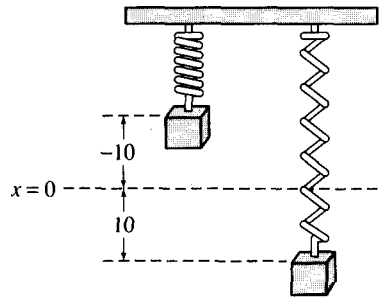
$$x(t) = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t$$

se obtiene x(O) = 10 = c_1 1 + c_2 . 0, y entonces $c_1 = 10$; por consiguiente

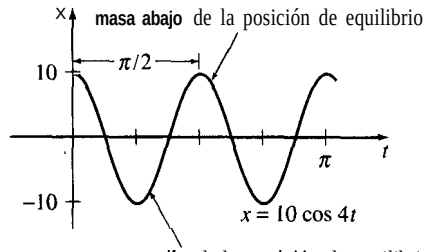
$$x(t) = 10 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t.$$

Como $x'(t) = -40 \operatorname{sen} 4t + 4c_2 \cos 4t$, entonces x' (0) = 0 = $4c_2$. 1, así que $c_2 = 0$; por consiguiente, la ecuación del movimiento es $x(t) = 10 \cos 4t$.

Está claro que la solución indica que el sistema permanece en movimiento una vez puesto en movimiento y la masa va y viene 10 unidades a cada lado de la posición de equilibrio $x = 0$. Como se advierte en la figura 5.4(b), el periodo de oscilación es $2\pi/4 = \pi/2$. ■



(a)



(b)

FIGURA 5.4

EJEMPLO 2 **Movimiento libre no amortiguado**

Una masa que pesa 2 lb hace que un resorte se estire 6 in. Cuando $t = 0$, la masa se suelta desde un punto a 8 in abajo de la posición de equilibrio con una velocidad inicial, hacia arriba, de $\frac{4}{3}$ ft/s. Deduzca la ecuación del movimiento libre.

SOLUCIÓN Como empleamos el sistema técnico de unidades inglesas, las medidas expresadas en pulgadas se deben pasar a pies: 6 ín = $\frac{1}{2}$ ft; 8 in = $\frac{2}{3}$ ft. Además, debemos convertir las unidades de peso, que están en libras, en unidades de masa. Partimos de m = W/g y, en este caso, $m = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$ slug. También, según la ley de Hooke, 2 = $k(\frac{1}{2})$ implican que la constante del resorte es $k = 4$ lb/ft; por lo tanto, la ecuación (1) se transforma en

$$\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2} = -4x \qquad 0 \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0.$$

El desplazamiento y la velocidad iniciales son x(O) = $\frac{2}{3}$, x'(O) = $-\frac{4}{3}$, donde el signo negativo en la última condición es consecuencia de que la masa recibe una velocidad inicial en dirección negativa o hacia arriba.

Entonces, $\omega^2 = 64$, o sea, $\omega = 8$, de modo que la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \operatorname{sen} 8t. \tag{4}$$

Al aplicar las condiciones iniciales a x(t) y x'(t) se obtienen $c_1 = \frac{2}{3}$ y $c_2 = -\frac{1}{6}$. Así, la ecuación del movimiento es

$$x(t) = \frac{2}{3}\cos 8t - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 8t. \tag{5}$$ ■

Forma alternativa de $x(t)$ Cuando $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$, la **amplitud** A de las vibraciones libres no se puede conocer de inmediato examinando la ecuación (3). Esto es, aunque la masa tiene un desplazamiento inicial de $\frac{2}{3}$ de pie respecto a la posición de equilibrio en el ejemplo 2, la amplitud de las vibraciones es mayor de $\frac{2}{3}$; por lo anterior, a menudo conviene pasar una solución de la forma (3) a la forma más simple

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi), \tag{6}$$

donde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y ϕ es un **ángulo de fase** definido por

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\phi &= \frac{c_1}{A} \\ \cos\phi &= \frac{c_2}{A} \end{aligned}\right\} \tan\phi = \frac{c_1}{c_2}. \tag{7}$$

Para comprobarlo, desarrollamos la ecuación (6) aplicando la fórmula del seno de la suma:

$$A \operatorname{sen}\omega t \cos\phi + A \cos \omega t \operatorname{sen}\phi = (A \operatorname{sen}\phi)\cos\omega t + (A \cos \phi) \operatorname{sen}\omega t. \tag{8}$$

En la figura 5.5 tenemos que si definimos ϕ mediante

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{c_1}{A}, \qquad \cos\phi = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{c_2}{A},$$

la ecuación (8) se transforma en

$$A\frac{c_1}{A}\cos\omega t + A\frac{c_2}{A}\operatorname{sen}\omega t = c_1\cos\omega t + c_2\operatorname{sen}\omega t = x(t).$$

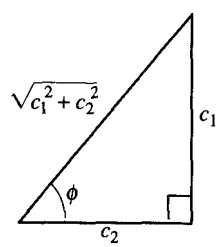


FIGURA 5.5

EJEMPLO 3 **Forma alternativa de solución de (5)**

En vista de lo que acabamos de explicar, podemos escribir la solución (5) del ejemplo 2 como sigue:

$$x(t) = \frac{2}{3}\cos 8t - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 8t \qquad \text{o, lo que es lo mismo,} \qquad x(t) = A\operatorname{sen}(8t + \phi).$$

La amplitud está definida por

$$A = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{6} \approx 0.69 \text{ ft}.$$

El lector debe tener cuidado al calcular el ángulo de fase ϕ, definido por (7). Cuando $c_1 = \frac{2}{3}$ y $c_2 = -\frac{1}{6}$, resulta que tan $\phi = -4$ y con una calculadora obtenemos tan-'(-4) = -1.326 rad.* Pero este ángulo está en el cuarto cuadrante y, por consiguiente, contraviene el hecho que sen $\phi > 0$ y $\cos\phi < 0$ (recordemos que $c_1 > 0$ y $c_2 < 0$). Entonces, debemos suponer que ϕ es un ángulo que está en el segundo cuadrante, $\phi = \pi + (-1.326) = 1.8\ 16$ rad. Así llegamos a

$$x(t) = \frac{\sqrt{17}}{6}\operatorname{sen}(8t + 1.816). \tag{9}$$

La forma (6) es útil porque con ella es fácil determinar valores del tiempo para los cuales la gráfica de x(t) cruza el eje positivo de las t (la línea x = 0). Observamos que $\operatorname{sen}(\omega t + \phi) = 0$ cuando $wt + \phi = n\pi$, donde n es un entero no negativo.

Sistemas con constantes de resorte variables En el modelo anterior supusimos un mundo ideal, en que las características físicas del resorte no cambian con el tiempo. Sin embargo, en el mundo real es lógico esperar que cuando un sistema resorte y masa ha estado en movimiento durante largo tiempo, el resorte se debilite (o "pierda brío"); en otras palabras, la "constante" de resorte va a variar o, más concretamente, decaerá a través del tiempo. En el modelo del **resorte desgastable,** la función decreciente K(t) = $ke^{-\alpha t}$, $k > 0$, $\alpha > 0$ sustituye a la constante de resorte k en (1). La ecuación diferencial mx" + $ke^{-\alpha t}x = 0$ no se puede resolver con los métodos que vimos en el capítulo 4; sin embargo, podemos obtener dos soluciones linealmente independientes con los métodos del capítulo 6. Véanse los problemas 15, ejercicios 5.1; el ejemplo 3, sección 6.4, y los problemas 39 y 40, ejercicios 6.4.

Cuando un sistema de masa y resorte se somete a un ambiente en que la temperatura es rápidamente decreciente, la constante k *se* podrá cambiar con K(t) = kt, $k > 0$, función que crece con el tiempo. El modelo resultante, $mx'' + ktx = 0$ **es** una forma de la **ecuación diferencial de Airy.** Al igual que la ecuación de un resorte envejecido, la de Airy se puede resolver con los métodos del capítulo 6. Véanse el problema 16, en los ejercicios 5.1; el ejemplo 4, en la sección 6.2, y los problemas 41 a 43, en los ejercicios 6.4.

51.2 Sistemas de resorte y masa: movimiento amortiguado libre

El concepto del movimiento armónico libre no es realista porque el movimiento que describe la ecuación (1) supone que no hay fuerzas de retardo que actúan sobre la masa en movimiento. A menos que la masa esté colgada en un vacío perfecto, cuando menos habrá una fuerza de resistencia debida al medio que rodea al objeto. Según se advierte en la figura 5.6, la masa podría estar suspendida en un medio viscoso o conectada a un dispositivo amortiguador.

Ecuación diferencial del movimiento amortiguado libre En mecánica, se considera que las fuerzas de amortiguamiento que actúan sobre un cuerpo son proporcionales a alguna potencia de la velocidad instantánea. En particular, supondremos en el resto de la descripción que esta fuerza está expresada por un múltiplo constante de dx/dt. Cuando no hay otras fuerzas externas aplicadas al sistema, se sigue por la segunda ley de Newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt}, \tag{10}$$

*La imagen de la tangente inversa es $-\pi/2 < \tan^{-1}x < \pi/2$

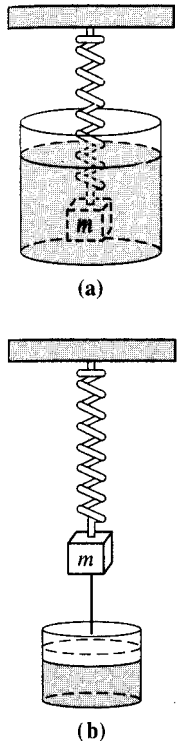


FIGURA 5.6

donde β es una *constante de amortiguamiento* positiva y el signo negativo es consecuencia del hecho de que la fuerza amortiguadora actúa en dirección opuesta a la del movimiento.

Al dividir la ecuación (10) por la masa m, la ecuación diferencial del **movimiento amortiguado libre** es $d^2x/dt^2 + (\beta/m)dx/dt + (k/m)x = 0$, o sea

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \tag{11}$$

donde

$$2\lambda = \frac{\beta}{m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}. \tag{12}$$

El símbolo 2λ sólo se usa por comodidad algebraica, porque así la ecuación auxiliar queda $m^2 + 2\lambda m + \omega^2 = 0$ y las raíces correspondientes son

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}, \qquad m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Ahora podemos distinguir tres casos posibles que dependen del signo algebraico de $\lambda^2 - \omega^2$. Puesto que cada solución contiene al *factor de amortiguamiento* $e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$, *los* desplazamientos de la masa se vuelven insignificantes cuando el tiempo es grande.

CASO I: $\lambda^2 - \omega^2 > 0$. Aquí, se dice que el sistema está **sobreamortiguado** porque el coeficiente de amortiguamiento, β, es grande comparado con la constante de resorte, k. La solución correspondiente de (11) es $x(t) = c_1e^{m_1t} + c_2e^{m_2t}$, o bien

$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t} + c_2e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t}). \tag{13}$$

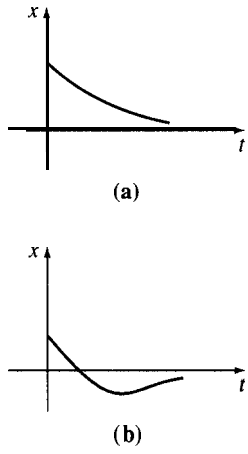


FIGURA 5.7

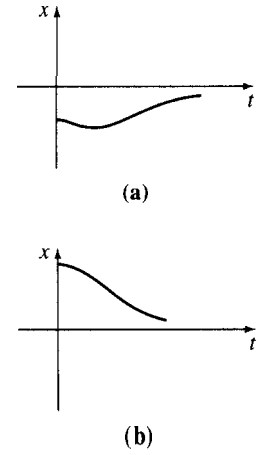


FIGURA 5.8

Esta ecuación representa un movimiento suave y no oscilatorio. La figura 5.7 muestra dos gráficas posibles de x(t).

CASO II: $\lambda^2 - \omega^2 = 0$. Se dice que el sistema está **críticamente amortiguado** puesto que cualquier pequeña disminución de la fuerza de amortiguamiento originaría un movimiento oscilatorio. La solución general de la ecuación (ll) es $x(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 t e^{m_1 t}$, es decir,

$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 + c_2 t). \tag{14}$$

En la figura 5.8 vemos dos típicos gráficos de este movimiento. Obsérvese que se parecen mucho a los de un sistema sobreamortiguado. También se aprecia, según la ecuación (14), que la masa puede pasar por la posición de equilibrio, a lo más una vez.

CASO III: $\lambda^2 - \omega^2 < 0$. Se dice que el sistema está **subamortiguado** porque el coeficiente de amortiguamiento es pequeño en comparación con la constante del resorte. Ahora las raíces m_1 y m_2 son complejas:

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, i, \qquad m_2 = -\lambda - \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, i.$$

Entonces, la solución general de la ecuación (ll) es

$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 \cos \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t). \tag{15}$$

Como se aprecia en la figura 5.9, el movimiento que describe (15) es oscilatorio pero, a causa del coeficiente $e^{-\lambda t}$, las amplitudes de vibración tienden a cero cuando $t \to \infty$.

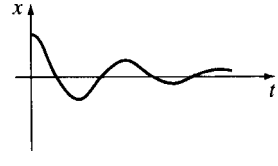


FIGURA 5.9

EJEMPLO 4 **Movimiento sobreamortiguado**

Se comprueba fácilmente que la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 4x = 0, \qquad x(0) = 1,\ x'(0) = 1$$

es

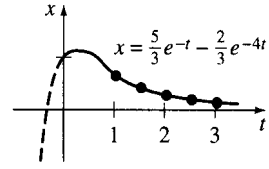
$$x(t) = \frac{5}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t}. \tag{16}$$

El problema se puede interpretar como representando el movimiento sobreamortiguado de una masa unida a un resorte. La masa comienza desde una posición 1 unidad *abajo* de la posición de equilibrio con una velocidad *hacia abajo* de 1 ft/s.

Para graficar x(t), se calcula el valor de t donde la función tiene un extremo; esto es, el valor del tiempo para el que la primera derivada (velocidad) es cero. Al derivar la ecuación (16) se llega a $x'(t) = -\frac{5}{3}e^{-t} + \frac{8}{3}e^{-4t}$, así que $x'(t) = 0$ implica que $e^{3t} = \frac{8}{5}$, o sea $t = \frac{1}{3}\ln\frac{8}{5} = 0.157$. De acuerdo con el criterio de la primera derivada y con la intuición física, $x(0.157) = 1.069$ ft es, en realidad, un máximo. En otras palabras, la masa llega a un desplazamiento extremo de 1.069 ft abajo de la posición de equilibrio.

También debemos comprobar si la gráfica cruza al eje t; esto es, si la masa pasa por la posición de equilibrio. Esto no puede suceder en este caso, porque la ecuación $x(t) = 0$, o $e^{3t} = \frac{2}{5}$ tiene la solución $t = \frac{1}{3}\ln\frac{2}{5} = -0.305$ que es físicamente irrelevante.

En la figura 5.10 mostramos la gráfica de x(t) y algunos de sus valores. ■



(a)

t	$x(t)$
1	0.601
1.5	0.370
2	0.225
2.5	0.137
3	0.083

(b)

FIGURA 5.10

EJEMPLO 5 **Movimiento críticamente amortiguado**

Una masa de 8 lb de peso estira 2 ft un resorte. Si una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 2 veces la velocidad instantánea actúa sobre el contrapeso, deduzca la ecuación del movimiento si la masa se suelta de la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 3 ft/s.

SOLUCIÓN De acuerdo con la ley de Hooke, $8 = k(2)$ da $k = 4$ lb/ft. Entonces $W = mg$ da $m = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ slug. Entonces la ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2} = -4x - 2\frac{dx}{dt} \quad \text{o sea} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0. \tag{17}$$

La ecuación auxiliar de (17) es $m^2 + 8m + 16 = (m + 4)^2 = 0$, de forma que $m_1 = m_2 = -4$. Luego el sistema es críticamente amortiguado y

$$x(t) = c_1e^{-4t} + c_2te^{-4t}. \tag{18}$$

Al aplicar las condiciones iniciales x(O) = 0 y x'(O) = -3 vemos, a su vez, que $c_1 = 0$ y $c_2 = -3$. Así, la ecuación del movimiento es

$$x(t) = -3te^{-4t}. \tag{19}$$

Para graficar $x(t)$ procedemos igual que en el ejemplo 4. De $x'(t) = -3e^{-4t}(1 - 4t)$ tenemos que $x'(t) = 0$ cuando $t = \frac{1}{4}$. El desplazamiento extremo correspondiente es $x(\frac{1}{4}) = -3(\frac{1}{4})e^{-1} = -0.276$ ft. En la figura 5.11 vemos que podemos interpretar este valor como el punto en que el contrapeso alcanza una altura máxima de 0.276 ft sobre su posición de equilibrio.

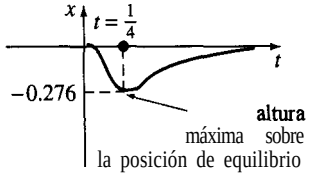


FIGURA 5.11

EJEMPLO 6 Movimiento subamortiguado

Un objeto que pesa 16 lb se une a un resorte de 5 ft de longitud. En la posición de equilibrio, el resorte mide 8.2 ft. Si el peso se eleva y se suelta del reposo en un punto a 2 ft arriba de la posición de equilibrio, determine los desplazamientos, $x(t)$. Considere que el medio que rodea al sistema ofrece una resistencia al movimiento numéricamente igual a la velocidad instantánea.

SOLUCIÓN El alargamiento del resorte, después de unir el peso, es 8.2 − 5 = 3.2 ft, de modo que, según la ley de Hooke, $16 = k(3.2)$, o sea $k = 5$ lb/ft. Además, $m = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$ slug y la ecuación diferencial es

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} = -5x - \frac{dx}{dt} \quad \text{o sea} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0. \tag{20}$$

Las raíces de $m^2 + 2m + 10 = 0$ son $m_1 = -1 + 3i$ y $m_2 = -1 - 3i$, lo cual implica que el sistema es subamortiguado y que

$$x(t) = e^{-t}(c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t). \tag{21}$$

Por último, las condiciones iniciales $x(0) = -2$ y $x'(0) = 0$ determinan las constantes $c_1 = -2$ y $c_2 = -\frac{2}{3}$, así que la ecuación de movimiento es

$$x(t) = e^{-t}\left(-2\cos 3t - \frac{2}{3}\operatorname{sen} 3t\right). \tag{22}$$ ■

Forma alternativa de $x(t)$ De manera idéntica al procedimiento que empleamos en la página 200, podemos escribir cualquier solución

$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 \cos\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,t)$$

en la forma alternativa

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\operatorname{sen}(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,t + \phi), \tag{23}$$

en donde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y el ángulo de fase ϕ queda determinado por las ecuaciones

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{c_1}{A}, \quad \cos\phi = \frac{c_2}{A}, \quad \tan\phi = \frac{c_1}{c_2}.$$

En ocasiones, el coeficiente $Ae^{-\lambda t}$ se denomina **amplitud amortiguada** de las vibraciones. Dado que la ecuación (23) no es una función periódica, el número $2\pi/\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$ se llama **cuasiperiodo** y $\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}/2\pi$ es la **cuasifrecuencia.** El cuasiperiodo es el intervalo de tiempo entre dos máximos sucesivos de x(t). El lector debe comprobar que en la ecuación de movimiento del ejemplo 6, $A = 2\sqrt{10}/3$ y $\phi = 4.391$. En consecuencia, una forma equivalente de *(22) es*

$$x(t) = \frac{2\sqrt{10}}{3}e^{-t}\operatorname{sen}(3t + 4.391).$$

5.1.3 Sistemas de resorte y masa: movimiento forrado

Ecuación diferencial del movimiento forzado con amortiguamiento Ahora tomaremos en cuenta una fuerza externa, $f(t)$, que actúa sobre una masa oscilatoria en un resorte; por ejemplo, $f(t)$ podría representar una fuerza de impulsión que causara un movimiento oscilatorio vertical del soporte del resorte (Fig. 5.12). La inclusión de $f(t)$ en la formulación de la segunda ley de Newton da la ecuación diferencial del **movimiento forzado:**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt} + f(t). \tag{24}$$

Al dividir esta ecuación por m se obtiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F(t) \tag{25}$$

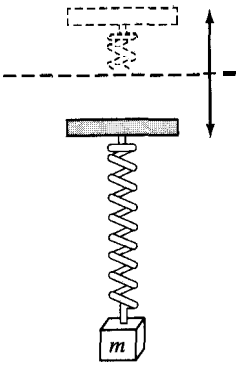


FIGURA 5.12

donde F(t) $= f(t)/m$ y, al igual que en la sección anterior, $2\lambda = \beta/m$, $\omega^2 = k/m$. Para resolver esta ecuación no homogénea tenemos el método de los coeficientes indeterminados o el de la variación de parámetros.

EJEMPLO 7 **Interpretación de un problema de valor inicial**

Interprete y resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2} + 1.2\frac{dx}{dt} + 2x = 5\cos 4t, \qquad x(0) = \frac{1}{2}, \quad x'(O) = 0. \tag{26}$$

SOLUCIÓN Podemos ver el problema como la representación de un sistema vibratorio formado por una masa (m = $\frac{1}{5}$ slug o kg) unida aun resorte (k = 2 lb/ft o N/m). La masa parte del reposo a $\frac{1}{2}$ unidad (ft o m) abajo de su posición de equilibrio. El movimiento es amortiguado (β^2 = 1.2) y está impulsado por una fuerza externa periódica (T = $\pi/2$ s) que se inicia cuando t = 0. Cabría esperar, intuitivamente, que aun con amortiguamiento el sistema permanecerá en movimiento hasta el momento en que la función forzada se "desconectara" y en adelante las amplitudes disminuyeran; sin embargo, tal como está enunciado el problema, $f(t) = 5\cos 4t$ permanecerá "conectada" por siempre.

Primero multiplicamos por 5 la ecuación diferencial (26)

$$\frac{dx^2}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 10x = 0$$

y la resolvemos con los métodos acostumbrados. Dado que $m_1 = -3 + i$, $m_2 = -3 - i$, entonces

$$x,(t) = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t).$$

Aplicamos el método de los coeficientes indeterminados, suponiendo que una solución particular tiene la forma $x_p(t) = A\cos 4t + B \operatorname{sen} 4t$. Entonces

$$x_p' = -4A \operatorname{sen} 4t + 4B\cos 4t, \qquad x_p'' = -16A\cos 4t - 16B\operatorname{sen} 4t$$

de modo que

$$x_p'' + 6x_p' + 10x_p = (-6A + 24B)\cos 4t + (-24A - 6B)\operatorname{sen} 4t = 25\cos 4t.$$

El sistema resultante de ecuaciones

$$-6A + 24B = 25. \qquad -24A - 6B = 0$$

tiene las soluciones $A = -\frac{25}{102}$ y $B = \frac{50}{51}$. En consecuencia

$$x(t) = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\operatorname{sen} 4t, \tag{27}$$

Cuando hacemos $t = 0$ en la ecuación de arriba obtenemos $c_1 = \frac{38}{51}$. Si diferenciamos la expresión y hacemos $t = 0$, obtenemos $c_2 = -\frac{86}{51}$; por consiguiente, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = e^{-3t}\left(\frac{38}{51}\cos t - \frac{86}{51}\operatorname{sen} t\right) - \frac{25}{102}\cos 4t + \frac{50}{51}\operatorname{sen} 4t. \tag{28}$$ ■

Términos transitorio y de estado estable Obsérvese que la función complementaria

$$x_c(t) = e^{-3t}\left(\frac{38}{51}\cos t - \frac{86}{51}\operatorname{sen} t\right)$$

en la ecuación (28) tiene la propiedad de que $\lim_{t \to \infty} x_c(t) = 0$. Como $x_c(t)$ se vuelve insignificante (es decir, $\to$ **0)** cuando $t \to \infty$, **se dice** que es **un término transitorio o solución transitoria.** Así, cuando el tiempo es grande, los desplazamientos de la masa del problema anterior son muy bien aproximados por la solución particular $x_p(t)$. Esta última función se llama también **solución de estado estable,** de **estado estacionario o** de **estado permanente.** Cuando F es una función periódica, como F(t) = F_0 sen γt o F(t) = $F_0 \cos \gamma t$, la solución general de la ecuación (25) esta formada por

$$x(t) = \textit{parte transitoria} + \textit{parte estable.}$$

EJEMPLO 8 Soluciones transitorias y de estado estable

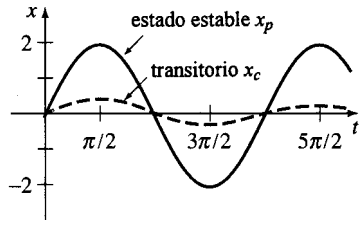
Se demuestra con facilidad que la solución del problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 4\cos t + 2\operatorname{sen} t, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 3$$

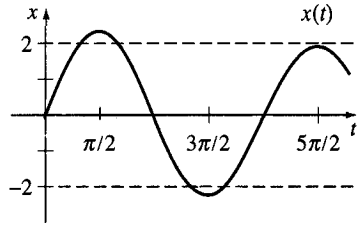
es

$$x = x_c + x_p = \underbrace{e^{-t}\operatorname{sen} t}_{\text{transitorio}} + \underbrace{2\operatorname{sen} t}_{\text{estado estable}}.$$

Al examinar la figura 5.13 vemos que el efecto del término transitorio en la solución es insignificante en este caso, cuando $t > 2\pi$. ■



(a)



(b)

FIGURA 5.13

Ecuaciones diferenciales del movimiento forzado sin amortiguamiento

Cuando se ejerce una fuerza periódica y no existe fuerza de amortiguamiento, no hay parte transitoria en la solución de un problema. Veremos también que si se ejerce una fuerza periódica cuya frecuencia es igual o casi igual a la de las vibraciones no amortiguadas libres, se puede originar un grave problema en un sistema mecánico oscilatorio.

EJEMPLO 9 Movimiento forzado no amortiguado

Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen} \gamma t, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \tag{29}$$

en donde F_0 es constante y $\gamma \neq w$.

SOLUCIÓN La función complementaria es $x_c(t) = c_1 \cos wt + c_2 \operatorname{sen} wt$. Para obtener una solución particular supondremos que $x_p(t) = A \cos \gamma t + B \operatorname{sen} \gamma t$, de modo que

$$x_p'' + \omega^2 x_p = A(\omega^2 - \gamma^2) \cos \gamma t + B(\omega^2 - \gamma^2) \operatorname{sen} \gamma t = F_0 \operatorname{sen} \gamma t.$$

Al igualar los coeficientes obtenemos de inmediato $A = 0$ y $B = F_0/(\omega^2 - \gamma^2)$; por consiguiente

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen} \gamma t.$$

Aplicamos las condiciones iniciales del problema a la solución general

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen} \gamma t$$

y obtenemos $c_1 = 0$ y $c_2 = -\gamma F_0/\omega(\omega^2 - \gamma^2)$; por lo tanto, la solución es

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)}(\text{-ysenot} + \textit{osenyt}), \quad \gamma \neq \omega. \tag{30}$$ ■

Resonancia pura Aunque la ecuación (30) no está definida cuando $\gamma = w$, es interesante observar que su valor límite, cuando $\gamma \to w$, se puede obtener aplicando la regla de L'Hôpital. Este proceso al límite equivale a una "sintonización" de la frecuencia de la fuerza impulsora $(\gamma/2\pi)$ con la de las vibraciones libres $(\omega/2\pi)$. Esperamos intuitivamente que al paso del tiempo podamos aumentar sustancialmente las ampitudes de vibración. Para $\gamma = w$, la solución se define como

$$\begin{aligned} x(t) = \lim_{\gamma\to\omega} F_0 \frac{-\gamma \operatorname{sen}\omega t + \text{osenyt}}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} &= F_0 \lim_{\gamma\to\omega} \frac{\frac{d}{d\gamma}(-\gamma \text{ sen } \omega t + \omega \text{ sen } \gamma t)}{\frac{d}{d\gamma}(\omega^3 - \omega\gamma^2)} \\ &= F_0 \lim_{\gamma\to\omega} \frac{\text{-sen } \omega t + \omega t \cos \gamma t}{-2\omega\gamma} \\ &= F_0 \frac{\text{-sen } \omega t + \omega t \cos \omega t}{-2\omega^2} \\ &= \frac{F_0}{2\omega^2}\operatorname{sen}\omega t - \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t. \end{aligned} \tag{31}$$

Como lo esperábamos, cuando $t \to \infty$, los desplazamientos crecen; de hecho, $|x(t_n)| \to \infty$ cuando $t_n = n\pi/\omega$, $n = 1, 2, \ldots$. El fenómeno que acabamos de describir **se** llama **resonancia pura.** La gráfica de la figura 5.14 muestra un movimiento característico de este caso.

En conclusión, se debe notar que no hay una necesidad real de emplear un proceso al límite en (30) para llegar a la solución para $\gamma = w$. También, la ecuación (31) es consecuencia de resolver el problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \text{ sen } \omega t, \qquad x(0) = 0, \quad x'(O) = 0$$

directamente por los métodos convencionales.

Si una fuerza como la (31) representa en realidad los desplazamientos de un sistema de resorte y masa, este sistema se destruiría. En último término, las oscilaciones grandes de la masa forzarían al resorte a rebasar su límite elástico. También se podría decir que el modelo

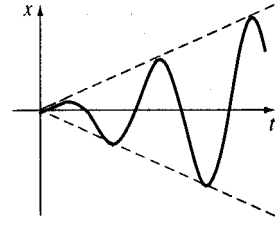


FIGURA 5.14

resonante de la figura 5.14 es irreal por completo, porque no tiene en cuenta los efectos retardantes de las siempre presentes fuerzas de amortiguamiento. Si bien es cierto que no se puede tener resonancia pura cuando se considera un amortiguamiento mínimo, también es cierto que se pueden desarrollar amplitudes grandes e igualmente destructivas de vibración (pero acotadas cuando $t \to \infty$). Véase el problema 43 en los ejercicios 5.1.

5.1.4 Sistemas análogos

Circuitos en serie *LRC* Según planteamos en la introducción a este capítulo, diversos sistemas físicos se pueden describir con una ecuación diferencial lineal de segundo orden semejante a la de las oscilaciones forzadas con amortiguamiento:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = f(t). \tag{32}$$

Si $i(t)$ representa la corriente en el **circuito eléctrico en serie** *LRC* de la figura 5.15, las caídas de voltaje a través del inductor, resistor y capacitor son las que muestra la figura 1.13. De acuerdo con la segunda ley de Kirchhoff, la suma de esas caídas es igual al voltaje E(t) aplicado al circuito; esto es,

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{33}$$

Pero $i = dq/dt$ relaciona la corriente $i(t)$ con la carga del capacitor $q(t)$, de manera que la ecuación (33) se transforma en la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{34}$$

La nomenclatura que se emplea en el análisis de circuitos es similar a la que se usa en los sistemas de resorte y masa.

Si $E(t) = 0$, las **vibraciones eléctricas** del circuito se llaman **libres.** Como la ecuación auxiliar de la (34) es $Lm^2 + Rm + 1/C = 0$, habrá tres formas de la solución cuando $R \neq 0$, dependiendo del valor del discriminante $R^2 - 4L/C$. Se dice que el circuito es

sobreamortiguado si $R^2 - 4L/C > 0$,

críticamente amortiguado si $R^2 - 4LIC = 0$,

Y **subamortiguado** si $R^2 - 4LIC < 0$.

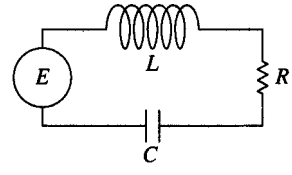


FIGURA 5.15

En cada uno de esos tres casos, la solución de (34) contiene el factor $e^{-Rt/2L}$, así que $q(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. En el caso subamortiguado, cuando $q(0) = q_0$, la carga en el capacitor oscila según decrece; en otras palabras, el capacitor se carga y descarga cuando $t \to \infty$. Cuando $E(t) = 0$ y $R = 0$, se dice que el circuito es no amortiguado, y las vibraciones eléctricas no tienden a cero cuando t aumenta sin límite; la respuesta del circuito **es armónica simple.**

EJEMPLO 10 **Circuito en serie subamortiguado**

Determine la carga $q(t)$ en el capacitor de un circuito en serie LRC, cuando $L = 0.25$ henry (h), $R = 10$ ohms (Ω), $C = 0.001$ farad (f), $E(t) = 0$, $q(0) = q_0$ coulombs (C) e $i(0) = 0$ amperes (A).

SOLUCIÓN Como $1/C = 1000$, la ecuación 34 se transforma en

$$\frac{1}{4}q'' + 10q' + 1000q = 0 \quad \text{o sea} \quad q'' + 40q' + 4000q = 0.$$

Al resolver esta ecuación homogénea como de costumbre, tenemos que el circuito es subamortiguado y que $q(t) = e^{-20t}(c_1 \cos 60t + c_2 \operatorname{sen} 60t)$. Aplicamos las condiciones iniciales y obtenemos que $c_1 = q_0$ y $c_2 = q_0/3$. Entonces

$$q(t) = q_0 e^{-20t}\left(\cos 60t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 60t\right).$$

Mediante la ecuación (23) podemos escribir la solución anterior en la forma

$$q(t) = \frac{q_0\sqrt{10}}{3} e^{-20t}\operatorname{sen}(60t + 1.249). \qquad \blacksquare$$

Cuando hay un voltaje $E(t)$ aplicado en el circuito, se dice que las vibraciones eléctricas son **forzadas.** Cuando $R \neq 0$, la función complementaria $q_c(t)$ de (34) se llama **solución transitoria.** Si $E(t)$ es periódico o una constante, la solución particular, $q_p(t)$, de (34), es una **solución de estado estable.**

EJEMPLO 11 **Corriente de estado estable**

Determine la solución $q_p(t)$ de estado estable y la **corriente de estado estable** en un circuito en serie LRC cuando el voltaje aplicado es $E(t) = E_0 \operatorname{sen} \gamma t$.

SOLUCIÓN La solución de estado estable $q_p(t)$ es una solución particular de la ecuación diferencial

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E_0 \operatorname{sen} \gamma t.$$

Al aplicar el método de los coeficientes indeterminados, suponemos una solución particular de la forma $q_p(t) = A \operatorname{sen} \gamma t + B \cos \gamma t$. Sustituimos esta expresión en la ecuación diferencial, simplificamos e igualamos coeficientes y los resultados son

$$A = \frac{E_0\left(L\gamma - \frac{1}{C\gamma}\right)}{-\gamma\left(L^2\gamma^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{C^2\gamma^2} + R^2\right)}, \quad B = \frac{E_0 R}{-\gamma\left(L^2\gamma^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{C^2\gamma^2} + R^2\right)}.$$

Conviene expresar a A y B en función de nuevos símbolos:

Si $$X = L\gamma - \frac{1}{C\gamma}, \quad \text{obtenemos } X^2 = L^2\gamma^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{C^2\gamma^2}.$$

Si $$Z = \sqrt{X^2 + R^2}, \quad \text{obtenemos } Z^2 = L^2\gamma^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{C^2\gamma^2} + R^2.$$

Por consiguiente, $A = E_0X/(-\gamma Z^2)$ y $B = E_0R/(-\gamma Z^2)$, de suerte que la carga de estado estable es

$$q_p(t) = -\frac{E_0X}{\gamma Z^2} \operatorname{sen} \gamma t - \frac{E_0R}{\gamma Z^2} \cos \gamma t.$$

Ahora bien, la corriente de estado estable está definida por $i_p(t) = q_p'(t)$:

$$i_p(t) = \frac{E_0}{Z}\left(\frac{R}{Z} \operatorname{sen} \gamma t - \frac{X}{Z} \cos \gamma t\right). \qquad (35) \blacksquare$$

Las cantidades $X = L\gamma - 1/C\gamma$ y $Z = \sqrt{X^2 + R^2}$, definidas en el ejemplo ll, se llaman, respectivamente, **reactancia e impedancia** del circuito. Ambas se expresan en ohms.

Barra de torsión La ecuación diferencial que describe el movimiento de torsión de una masa colgada en el extremo de un eje elástico es

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + c\frac{d\theta}{dt} + k\theta = T(t). \qquad (36)$$

Como vemos en la figura 5.16, la función $\theta(t)$ representa la magnitud del giro de la masa en cualquier momento.

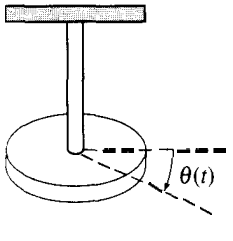


FIGURA 5.16

Al comparar las ecuaciones (25) y (34) con la (36), resulta que -excepto por la terminología- no existe diferencia alguna entre la descripción matemática de los resortes con masa, los circuitos simples en serie y las oscilaciones de torsión.

EJERCICIOS 5.1

5.1.1

1. Se fija un contrapeso de 4 lb a un resorte cuya constante es 16 lb/ft. ¿Cuál es el periodo del movimiento armónico simple?
2. Se fija una masa de 20 kg a un resorte. Si la frecuencia del movimiento armónico simple es $2/\pi$ oscilaciones por segundo, ¿cuál es la constante k del resorte? ¿Cuál es la frecuencia del movimiento armónico simple si la masa original se reemplaza con una de 80 kg?
3. Al fijar un contrapeso de 24 lb al extremo de un resorte, lo estira 4 in. Deduzca la ecuación del movimiento cuando el contrapeso se suelta y parte del reposo desde un punto que está 3 in arriba de la posición de equilibrio.
4. Formule la ecuación del movimiento si el contrapeso del problema 3 parte de la posición de equilibrio con una velocidad inicial de 2 ft/s hacia abajo,
5. Un contrapeso de 20 lb estira 6 in a un resorte. En ese sistema, el contrapeso se suelta, partiendo del reposo, a 6 in abajo de la posición de equilibrio.
   a) Calcule la posición del contrapeso cuando $t = \pi/12, \pi/8, \pi/6, \pi/4$ y $9\pi/32$ segundos.
   b) ¿Cuál es la velocidad del contrapeso cuando $t = 3\pi/16$ s? ¿Hacia dónde se dirige el contrapeso en ese instante?
   c) ¿Cuándo pasa el contrapeso por la posición de equilibrio?
6. Una fuerza de 400 N estira 2 m un resorte. Después, al extremo de ese resorte, se fija una masa de 50 kg y parte de la posición de equilibrio a una velocidad de 10 m/s hacia arriba. Deduzca la ecuación del movimiento.
7. Otro resorte, cuya constante es 20 N/m, esta colgado del mismo soporte rígido, pero en posición paralela a la del sistema resorte y masa del problema 6. Al segundo resorte se le fija una masa de 20 kg, y ambas masas salen de su posición de equilibrio con una velocidad de 10 m/s hacia arriba.
   a) ¿Cuál masa tiene la mayor amplitud de movimiento?
   b) ¿Cuál masa se mueve con más rapidez cuando $t = \pi/4$ s? ¿Y cuando $t = \pi/2$ s?
   c) ¿En qué momento están las dos masas en la misma posición? ¿Dónde están en ese momento? ¿En qué direcciones se mueven?
8. Un contrapeso de 32 lb estira 2 ft a un resorte. Determine la amplitud y el periodo de movimiento si el contrapeso parte de 1 ft arriba de la posición de equilibrio, con una velocidad inicial de 2 ft/s hacia arriba. ¿Cuántas vibraciones completas habrá hecho el contrapeso hasta los 4π segundos?
9. Un contrapeso de 8 lb, fijo a un resorte, tiene movimiento armónico simple. Deduzca la ecuación del movimiento si la constante del resorte es 1 lb/ft y el contrapeso parte de 6 in abajo del punto de equilibrio, con una velocidad de $\frac{3}{2}$ ft/s hacia abajo. Exprese la solución en la forma de la ecuación (6).

10. Una masa pesa 10 lb, y estira $\frac{1}{4}$ ft un resorte. Se quita esa masa y se reemplaza con una de 1 y 6 slugs que parte de $\frac{1}{3}$ ft sobre la posición de equilibrio con una velocidad de $\frac{5}{4}$ ft/s hacia abajo. Exprese la solución en la forma (6). ¿En qué momento llega la masa a un desplazamiento numéricamente igual a $\frac{1}{2}$ de la amplitud abajo de la posición de equilibrio?

11. Un contrapeso de 64 lb está unido al extremo de un resorte y lo estira 0.32 ft. Si parte de una posición 8 in sobre la posición de equilibrio, con una velocidad de 5 ft/s hacia abajo.

a) Deduzca la ecuación del movimiento.

b) ¿Cuáles son la amplitud y el periodo del movimiento?

c) ¿Cuántas oscilaciones completas habrá hecho el contrapeso a los 37r segundos?

d) ¿En qué momento pasa el contrapeso por la posición de equilibrio al ir hacia abajo por segunda vez?

e) ¿En qué momento alcanza el contrapeso su desplazamiento extremo en ambos lados de la posición de equilibrio?

f) ¿Cuál es la posición del contrapeso cuando $t = 3$ s?

g) ¿Cuál es su velocidad instantánea cuando $t = 3$ s?

h) ¿Cuál es su aceleración cuando $t = 3$ s?

i) ¿Cuál es la velocidad instantánea al pasar por la posición de equilibrio?

j) ¿En qué momentos está a 5 in abajo de la posición de equilibrio?

k) ¿En qué momentos está 5 in abajo de la posición de equilibrio y se mueve hacia arriba?

12. Se cuelga una masa de 1 slug de un resorte cuya constante es 9 lb/ft. Al principio, la masa parte de un punto a 1 ft arriba de la posición de equilibrio, con una velocidad de $\sqrt{3}$ ft/s hacia arriba. Determine los momentos en que la masa se dirige hacia abajo con una velocidad de 3 ft/s.

13. En algunos casos, cuando dos resortes paralelos de constantes k_1 y k_2 sostienen un solo contrapeso W, la **constante efectiva de resorte** del sistema es $k = 4k_1k_2/(k_1 + k_2)$. Un contrapeso de 20 lb estira 6 in un resorte y 2 in otro. Estos resortes están fijos a un soporte rígido común por su parte superior y a una placa metálica en su extremo inferior. Como se ve en la figura 5.17, el contrapeso de 20 lb está fijo al centro de la placa del sistema. Determine la constante efectiva de resorte de este sistema. Deduzca la ecuación del movimiento, si el contrapeso parte de la posición de equilibrio, con una velocidad de 2 ft/s hacia abajo.

14. Cierto contrapeso estira $\frac{1}{3}$ ft un resorte, y $\frac{1}{2}$ ft otro. Los dos resortes se fijan a un soporte rígido, como se indicó en el problema 13 y en la figura 5.17. El primer contrapeso se quita y en su lugar se pone uno de 8 lb. El periodo de movimiento es $\pi/15$ s; determine el valor numérico del primer contrapeso.

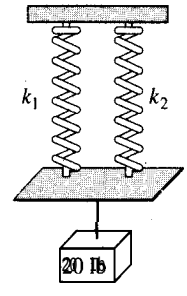


FIGURA 5.17

Problemas para discusión

15. Sólo por inspección de la ecuación diferencial $4x'' + e^{-0.1t}x = 0$, describa el comportamiento durante un gran periodo de un sistema de resorte y masa regido por la ecuación.
16. Sólo por inspección de la ecuación diferencial $4x'' + tx = 0$, describa el comportamiento durante un gran periodo de un sistema de resorte y masa regido por la ecuación.

5.1.2

En los problemas 17 a 20 la figura respectiva representa la gráfica de una ecuación del movimiento de una masa unida a un resorte. El sistema masa-resorte es amortiguado. Con la gráfica, determine

a) Si el desplazamiento inicial de la masa ocurre arriba o abajo de la posición de equilibrio
b) Si la masa está inicialmente en reposo o si está moviéndose hacia abajo o si está moviéndose hacia arriba.

17.

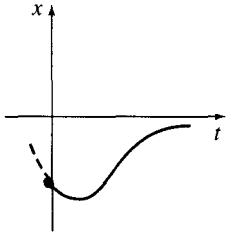


FIGURA 5.18

18.

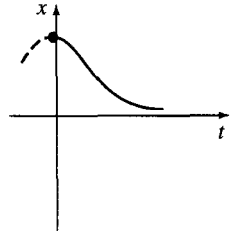


FIGURA 5.19

19.

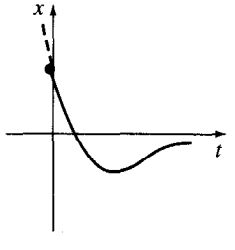


FIGURA 5.20

20.

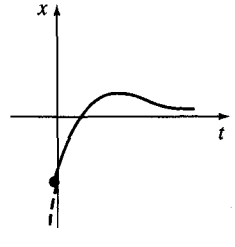


FIGURA 5.2 1

21. Una pesa de 4 lb se une a un resorte cuya constante es 2 lb/ft. El medio presenta una resistencia al movimiento numéricamente igual a la velocidad instantánea. Si la pesa se suelta de un punto a 1 ft arriba de la posición de equilibrio con una velocidad de 8 ft/s hacia abajo, calcule el tiempo en que pasa por la posición de equilibrio. Encuentre el momento en que la pesa llega a su desplazamiento extremo respecto ala posición de equilibrio. ¿Cuál es su posición en ese instante?
22. Un resorte de 4 ft alcanza 8 ft al colgarle una pesa de 8 lb. El medio a través del cual se mueve ofrece una resistencia numéricamente igual a $\sqrt{2}$ veces su velocidad instantánea. Deduzca la ecuación del movimiento si la pesa se suelta de la posición de equilibrio con una velocidad de 5 ft/s hacia abajo. Calcule el tiempo en que llega a su desplazamiento extremo respecto a la posición de equilibrio. ¿Cuál es su posición en ese instante?

23. Una masa de 1 kg está unida a un resorte cuya constante es 16 N/m y todo el sistema se sumerge en un líquido que imparte una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 10 veces la velocidad instantánea. Formule las ecuaciones del movimiento, si
    a) El contrapeso se suelta, partiendo del reposo a 1 m abajo de la posición de equilibrio
    b) El contrapeso se suelta partiendo de la posición de equilibrio con una velocidad de 12 m/s hacia arriba.
24. En las partes a) y b) del problema 23, determine si la pesa pasa por la posición de equilibrio. En cada caso calcule el momento en que llega a su desplazamiento extremo respecto a la posición de equilibrio. ¿Cuál es la posición de la pesa en ese instante?
25. Una fuerza de 2 lb estira 1 ft un resorte. A ese resorte se le une un contrapeso de 3.2 lb y el sistema se sumerge en un medio que imparte una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 0.4 la velocidad instantánea.
    a) Deduzca la ecuación del movimiento si el contrapeso parte del reposo 1 ft arriba de la posición de equilibrio.
    b) Exprese la ecuación del movimiento en la forma de la ecuación (23).
    c) Calcule el primer momento en que el contrapeso pasa por la posición de equilibrio dirigiéndose hacia arriba.
26. Después de unir una pesa de 10 lb a un resorte de 5 ft, éste mide 7 ft. Se quita y se reemplaza con otra de 8 lb, y el sistema se coloca en un medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea.
    a) Deduzca la ecuación del movimiento, si se suelta la pesa a $\frac{1}{2}$ ft abajo de la posición de equilibrio a una velocidad de 1 ft/s hacia abajo.
    b) Exprese la ecuación del movimiento en forma de la ecuación (23).
    c) Calcule los momentos en que el contrapeso pasa por la posición de equilibrio al dirigirse hacia abajo.
    d) Grafique la ecuación del movimiento.
27. Al unir una pesa de 10 lb a un resorte, éste se estira 2 ft. La pesa también está unida a un amortiguador, que ofrece una resistencia numéricamente igual a β ($\beta > 0$) veces la velocidad instantánea. Calcule los valores de la constante de amortiguamiento β para que el movimiento que se produce sea a) sobreamortiguado; b) críticamente amortiguado, y c) subamortiguado.
28. Una pesa de 24 lb estira 4 ft un resorte. El movimiento que se produce se lleva a cabo en un medio que presenta una resistencia numéricamente igual a β ($\beta > 0$) veces la velocidad instantánea. Si la pesa parte de la posición de equilibrio con una velocidad de 2 ft/s hacia arriba, demuestre que si $\beta > 3\sqrt{2}$, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = \frac{-3}{\sqrt{\beta^2 - 18}} e^{-2\beta t/3} \operatorname{senh} \frac{2}{3}\sqrt{\beta^2 - 18}\, t.$$

5.1.3

29. Una pesa de 16 lb estira $\frac{8}{3}$ ft un resorte. Al principio, parte del reposo a 2 ft arriba de la posición de equilibrio y el movimiento ocurre en un medio que presenta una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a la mitad de la velocidad instantánea. Deduzca la ecuación del movimiento si la pesa está impulsada por una fuerza externa igual a $f(t) = 10 \cos 3t$.
30. Se une una masa de 1 slug a un resorte cuya constante es 5 lb/ft. Se suelta la masa a 1 ft abajo de la posición de equilibrio con una velocidad de 5 ft/s hacia abajo; el movimiento

se da en un medio cuya fuerza de amortiguamiento es numéricamente igual al doble de la velocidad instantánea.

a) Deduzca la ecuación del movimiento si una fuerza externa igual a $f(t) = 12 \cos 2t + 3 \operatorname{sen} 2t$ actúa sobre la masa.

b) Grafique las soluciones transitoria y de estado estable en el mismo conjunto de ejes coordenados.

c) Grafique la ecuación del movimiento.

31. Cuando una masa de 1 slug se cuelga de un resorte, lo estira 2 ft, y llega al reposo en su posición de equilibrio. A partir de $t = 0$, se aplica una fuerza externa al sistema, igual a $f(t) = 8 \operatorname{sen} 4t$. Formule la ecuación del movimiento si el medio presenta una fuerza amortiguadora numéricamente igual a 8 veces la velocidad instantánea.

32. En el problema 31, deduzca la ecuación del movimiento si la fuerza externa es $f(t) = e^{-t} \operatorname{sen} 4t$. Analice los desplazamientos cuando $t \to \infty$.

33. Cuando una masa de 2 kg se cuelga de un resorte cuya constante es 32 N/m, llega a la posición de equilibrio. A partir de $t = 0$ se aplica al sistema una fuerza igual a $f(t) = 68e^{-2t} \cos 4t$. Deduzca la ecuación del movimiento cuando no hay amortiguamiento.

34. En el problema 33, escriba la ecuación del movimiento en la forma $x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) + Be^{-2t} \operatorname{sen}(4t + \theta)$. ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones cuando el tiempo es muy grande?

35. Una masa m se une al extremo de un resorte cuya constante es k. Después de alcanzar el equilibrio, su soporte comienza a oscilar verticalmente a ambos lados de una línea horizontal, L, de acuerdo con una función $h(t)$. El valor de h representa la distancia, en pies, medida a partir de L. Vea la figura 5.22.

a) Deduzca la ecuación diferencial del movimiento si el sistema se mueve por un medio que presenta una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a $\beta(dx/dt)$.

b) Resuelva la ecuación diferencial en la parte a) si un contrapeso de 16 lb estira el resorte 4 ft y $\beta = 2$, $h(t) = 5 \cos t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

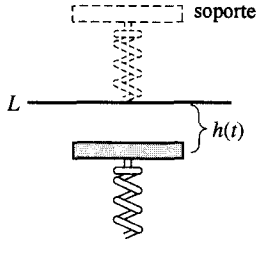


FIGURA 5.22

36. Una masa de 1 OO g se cuelga de un resorte cuya constante es 1600 dinas/cm. Luego que alcanza el equilibrio su soporte oscila de acuerdo con $h(t) = \operatorname{sen} 8t$, donde h representa al desplazamiento respecto a la posición de equilibrio. Vea el problema 35 y la figura 5.22.

a) Cuando no hay amortiguamiento, determine la ecuación del movimiento si la masa parte del reposo en la posición de equilibrio.

b) ¿En qué momento pasa la masa por la posición de equilibrio?

c) ¿En qué momento la masa llega a sus desplazamientos extremos?

d) ¿Cuáles son los desplazamientos máximo y mínimo?

e) Grafique la ecuación del movimiento.

En los problemas 37 y 38 resuelva el problema de valor inicial correspondiente.

37. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4x = -5\operatorname{sen} 2t + 3\cos 2t, \quad x(O) = -1, \; x'(0) = 1$

38. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 9x = 5 \operatorname{sen} 3t, \quad x(O) = 2, \; x'(O) = 0$

39. a) Demuestre que la solución al problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \cos \gamma t, \qquad x(0) = 0, \quad x'(O) = 0$$

es

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}(\cos \gamma t - \cos ot).$$

b) Evalúe $\lim_{\gamma \to \omega} \dfrac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}(\cos \gamma t - \cos \omega t)$.

40. Compare el resultado obtenido en la parte b) del problema 39, con la que se obtiene aplicando el método de variación de parámetros, cuando la fuerza externa es $F_0 \cos wt$.

41. a) Demuestre que $x(t)$ expresada en la parte a) del problema 39 se puede expresar

$$x(t) = \frac{-2F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\gamma - \omega)t \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\gamma + \omega)t.$$

b) Si definimos $\varepsilon = \frac{1}{2}(\gamma - \omega)$, demuestre que cuando ε es pequeño, una solución *aproximada es*

$$x(t) = \frac{F_0}{2\varepsilon\gamma} \operatorname{sen} \varepsilon t \operatorname{sen} \gamma t.$$

Cuando ε es pequeño, la frecuencia, $\gamma/2\pi$ de la fuerza aplicada se acerca a la frecuencia, $\omega/2\pi$ de las vibraciones libres. Cuando esto sucede, el movimiento es el que se ve en la figura 5.23. Las oscilaciones de este tipo se llaman *pulsaciones* o pulsos y se deben a que la **frecuencia** de sen εt es bastante pequeña en comparación con la de sen γt. Las curvas punteadas, *o envolvente* de la gráfica de $x(t)$, se obtienen de las gráficas de $\pm(F_0/2\varepsilon\gamma)$ sen εt. Use una **graficadora** y con varios valores de F_0, ε y γ compruebe la figura 5.23.

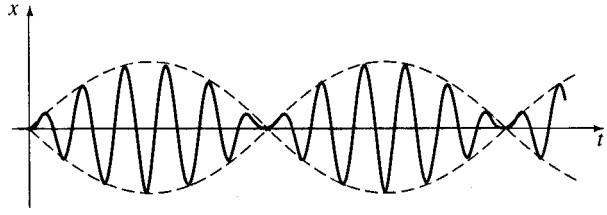


FIGURA 5.23

Problemas para discusión

42. ¿Puede haberpulsos cuando se agrega una fuerza de amortiguamiento al modelo en la parte a) del problema 39? Compruebe su respuesta con gráficas obtenidas de la solución explícita del problema

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F_0 \cos \gamma t, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

o con curvas de solución obtenidas con un *ODE solver*.

43. **a)** Demuestre que la solución general de

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen} \gamma t$$

es

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\operatorname{sen}(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,t + \phi) + \frac{F0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}\operatorname{sen}(\gamma t + \theta),$$

en que $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y los ángulos de fase ϕ y 6' están definidos, respectivamente, por $\operatorname{sen}\phi = c_1/A, \cos\phi = c_2/A$ y

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{-2A\gamma}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{\omega^2 - \gamma^2}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}.$$

b) La solución de la parte a) tiene la forma $x(t) = x_c(t) + x_p(t)$. Por inspección, se ve que $x_c(t)$ es transitoria y, por consiguiente, cuando los valores del tiempo son grandes, está definida aproximadamente por $x_p(t) = g(\gamma)\operatorname{sen}(\gamma t + \theta)$, donde

$$g(\gamma) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}.$$

Aunque la amplitud g(y) de $x_p(t)$ está acotada cuando $t \to \infty$, demuestre que las oscilaciones máximas se presentarán en el valor $\gamma_1 = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2}$. ¿Cuál es el valor máximo de g? El numero $\sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2}/2\pi$ se llama **frecuencia de resonancia** del sistema.

c) Cuando $F_0 = 2$, $m = 1$ y $k = 4$, g es

$$g(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{(4 - \gamma^2)^2 + \beta^2\gamma^2}}.$$

Forme una tabla de valores de γ_1 y $g(\gamma_1)$ que corresponda a los coeficientes de amortiguamiento $\beta = 2$, $\beta = 1$, $\beta = \frac{3}{4}$, $\beta = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{4}$. Use una graficadora para trazar las gráficas de g que correspondan a esos coeficientes. Utilice las mismas coordenadas. Esta familia de gráficas se llama **curva de resonancia o curva de respuesta a la frecuencia** del sistema. ¿Hacia qué tiende γ_1 cuando $\beta \to 0$? ¿Qué sucede con las curvas de resonancia cuando $\beta \to 0$?

44. Se tiene un sistema resorte y masa forzado y no amortiguado, descrito por el problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen}^n \gamma t, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

a) Describa para $n = 2$ por qué hay una sola frecuencia, $\gamma_1/2\pi$, en que el sistema está en resonancia pura.

b) Para $n = 3$, explique por qué hay dos frecuencias, $\gamma_1/2\pi$ y $\gamma_2/2\pi$ en las cuales el sistema está en resonancia pura.

c) Suponga que $\omega = 1$ y $F_0 = 1$. Use un *ODE solver* para obtener la gráfica de la solución del problema de valor inicial para $n = 2$ y $\gamma = \gamma_1$ en la parte a). Trace la gráfica de la solución del problema de valor inicial para $n = 3$ que corresponde, sucesivamente, a $\gamma = \gamma_1$ y $\gamma = \gamma_2$ en la parte b).

5.1.4

45. Determine la carga del capacitor en un circuito en serie *LRC* cuando $t = 0.01$ s, L = 0.05 h, $R = 2\ \Omega$, C = 0.01 f, $E(t) = 0$ V, $q(O) = 5$ C e i(O) = 0 A. Encuentre el primer momento en el que la carga en el capacitor es cero.

46. Determine la carga en el capacitor de un circuito en serie *LRC* cuando $L = \frac{1}{4}$ h, $R = 20\ \Omega$, C = $\frac{1}{300}$ f, $E(t) = 0$ V, $q(O) = 4$ C e $i(0) = 0$ A. x ¿En algún momento la carga del capacitor es igual a cero?

En los problemas 47 y 48 determine la carga en el capacitor y la corriente en el circuito en serie *LRC*. Calcule la carga máxima en el capacitor.

47. $L = \frac{5}{3}$ h, $R = 10\ \Omega$, $C = \frac{1}{30}$ f, $E(t) = 300$ V, $q(0) = 0$ C, $i(0) = 0$ A.

48. $L = 1$ h, $R = 100\ \Omega$, C = 0.0004 f, $E(t) = 30$ V, $q(O) = 0$ C, $i(O) = 2$ A.

49. Determine la carga y la corriente de estado estable en un circuito en serie *LRC* cuando $L = 1$ h, $R = 2\ \Omega$, $C = 0.25$ f y $E(t) = 50 \cos t$ V.

50. Demuestre que la amplitud de la corriente de estado estable en el circuito en serie *LRC* del ejemplo ll está expresada por E_0/Z, donde Z es la impedancia del circuito.

51. Demuestre que la corriente de estado estable en un circuito en serie *LRC* está definida por $i_p(t) = (4.160) \operatorname{sen}(60t - 0.588)$ cuando $L = \frac{1}{2}$ h, $R = 20\ \Omega$, $C = 0.001$ f y $E(t) = 100$ sen $60t$ V. (Sugerencia: use los resultados del problema 50.) .

52. Determine la corriente de estado estable en un circuito en serie *LRC* cuando $L = \frac{1}{2}$ h, $R = 20\ \Omega$, C = 0.001 f, y $E(t) = 100$ sen $60t + 200 \cos 40t$ V.

53. Calcule la carga *en* el capacitor de un circuito en serie *LRC* cuando $L = \frac{1}{2}$ h, $R = 10\ \Omega$, C = 0.01 f, $E(t) = 150$ V, $q(O) = 1$ C e $i(O) = 0$ A. ¿Cuál es la carga en el capacitor cuando ha transcurrido mucho tiempo?

54. Demuestre que si L, R, C y E_0 son constantes, la amplitud de la corriente de estado estable del ejemplo ll es máxima cuando $\gamma = 1/\sqrt{LC}$. ¿Cuál es la amplitud máxima?

55. Demuestre que si L, R, E_0 y γ son constantes, la amplitud de la corriente de estado estable en el ejemplo ll es máxima cuando la capacitancia es $C = 1/L\gamma^2$.

56. Determine la carga en el capacitor y la corriente en un circuito *LC* cuando $L = 0.1$ h, C = 0.1 f, $E(t) = 100 \operatorname{sen} \gamma t$ V, $q(0) = 0$ C e $i(0) = 0$ A.

57. Calcule la carga en el capacitor y la corriente en un circuito *LC* cuando E(t) = $E_0 \cos \gamma t$ V, $q(O) = q_0$ C e $i(O) = i_0$ A.

58. En el problema 57 determine la corriente cuando el circuito se encuentre en resonancia.

5.2 ECUACIONES LINEALES: PROBLEMAS DE VALORES EN LA FRONTERA

■ *Ecuación diferencial de la flexión de una viga* ■ *Condiciones en la frontera*
■ *Valores propios y funciones propias* ■ *Soluciones no triviales* ■ *Soluciones numéricas*
■ *Curvatura de una columna delgada* ■ *Carga de Euler* ■ *Ecuación diferencial de la cuerda de brincar*

La sección precedente se centró en sistemas en los que un modelo matemático de segundo orden estaba acompañado con las condiciones iniciales prescritas; esto es, condiciones adjuntas de la función desconocida y su primera derivada, que se especifican en un solo punto. Pero, con frecuencia, la descripción matemática de un sistema físico requiere la solución de una ecuación diferencial sujeta a condiciones en la frontera; esto es, condiciones especificadas para la función desconocida o una de sus derivadas, e incluso para una combinación de la función desconocida y una de sus derivadas, en dos o más puntos distintos.

Desviación de una viga Una buena cantidad de estructuras se construyen a base de vigas, vigas que se desvían o distorsionan por su propio peso o la influencia de alguna fuerza externa. Según veremos a continuación, esta desviación y(x) está determinada por una ecuación diferencial lineal de cuarto orden, relativamente sencilla.

Para empezar, supongamos que una viga de longitud *L* es homogénea y tiene sección transversal uniforme en toda su longitud. Cuando no recibe carga alguna, incluyendo su propio peso, la curva que une los centroides de sus secciones transversales es una recta que se llama **eje de simetria.** [Fig. 5.24(a)]. Si a la viga se le aplica una carga en un plano vertical que contenga al eje de simetría, sufre una distorsión y la curva que une los centroides de las secciones transversales se llama **curva de desviación, curva elástica** o simplemente **elástica.** La elástica aproxima la forma de la viga. Supongamos que el eje x coincide con el eje de simetría

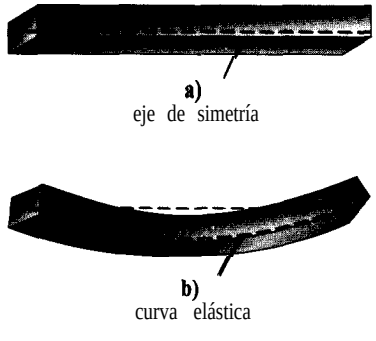


FIGURA 5.24

y que la **desviación** (o **flecha)** y(x), medida desde el eje, es positiva si es hacia abajo. En teoría de la elasticidad se demuestra que el momento flexionante $M(x)$ en un punto x a lo largo de la viga, se relaciona con la carga por unidad de longitud $w(x)$ mediante la ecuación

$$\frac{d^2M}{dx^2} = w(x). \tag{1}$$

Además, el momento flexionante $M(x)$ es proporcional a la curvatura, κ, de la elástica:

$$M(x) = EI\kappa, \tag{2}$$

en que E e I son constantes, E es el módulo de Young de elasticidad del material de la viga e I es el momento de inercia de la sección transversal de ésta (respecto de un eje llamado eje neutro). El producto EZ se denomina **rigidez a la flexión** de la viga.

Según el cálculo diferencial, la curvatura es $\kappa = y''/[1 + (y')^2]^{3/2}$. Cuando la desviación y(x) es pequeña, la pendiente $y' \approx 0$, de modo que $[1 + (y')^2]^{3/2} \approx 1$. Si $\kappa = y''$, la ecuación (2) se transforma en $M = EIy''$. La segunda derivada de esta ecuación es

$$\frac{d^2M}{dx^2} = EI\frac{d^2}{dx^2}y'' = EI\frac{d^4y}{dx^4}. \tag{3}$$

Aplicamos el resultado de la ecuación (1) para reemplazar d^2M/dx^2 en la (3) y vemos que la desviación y(x) satisface la ecuación diferencial de cuarto orden

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w(x). \tag{4}$$

Las condiciones en la frontera asociadas a esta ecuación dependen de la forma en que están sostenidos los extremos de la viga. Una viga en voladizo (en cantilíver) está **empotrada** en un extremo y libre en el otro. Un trampolín, un brazo extendido, el ala de un avión y una marquesina son ejemplos comunes de este caso, pero hasta los arboles, las astas de banderas, los rascacielos y los monumentos pueden trabajar como vigas en voladizo, ya que están empotrados en su base y sufren la fuerza del viento, que los tiende a flexionar. Para una viga en voladizo, la desviación $y(x)$ debe satisfacer las dos condiciones siguientes en el extremo empotrado en $x = 0$:

- $y(0) = 0$ porque no hay desviación en ese lugar, y
- $y'(O) = 0$ porque la curva de desviación es tangente al eje x (en otras palabras, la pendiente de la curva de desviación es cero en ese punto).

Cuando $x = L$ las condiciones del extremo libre son

- y"(L) = 0 porque el momento flexionante es cero
- y"'(L) = 0 porque la fuerza cortante es cero.

La función $F(x) = dM/dx = EI\ d^3y/dx^3$ se llama fuerza cortante. Si un extremo de una viga está **simplemente apoyado** (a esto también se le llama **embisagrado, articulado o empernado),** se debe cumplir que y = 0 y y" =0 en ese extremo. La tabla siguiente es un resumen de las condiciones en la frontera asociadas con la ecuación (4).

Extremos de la viga	Condiciones en la frontera
empotrado	$y = 0, y' = 0$
libre	$y'' = 0, y''' = 0$
simplemente apoyado	$y = 0, y'' = 0$

EJEMPLO 1 Viga empotrada

Una viga de longitud L está empotrada en ambos extremos. Determine la desviación de esa viga si sostiene una carga constante, w_0, uniformemente distribuida en su longitud; esto es, $w(x) = w_0$, $0 < x < L$.

SOLUCIÓN Según lo que acabamos de plantear, la desviación $y(x)$ satisface a

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w_0.$$

Puesto que la viga está empotrada en su extremo izquierdo $(x = 0)$ y en su extremo derecho $(x = L)$, no hay desviación vertical y la elástica es horizontal en esos puntos. Así, las condiciones en la frontera son

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \qquad y(L) = 0, \quad y'(L) = 0.$$

Podemos resolver la ecuación diferencial no homogénea en la forma acostumbrada (determinar y_c teniendo en cuenta que $m = 0$ es una raíz de multiplicidad cuatro de la ecuación auxiliar $m^4 = 0$, para después hallar una solución particular y_p por el método de coeficientes indeterminados) o simplemente integramos la ecuación $d^4y/dx^4 = w_0/EI$ cuatro veces sucesivas. De cualquier forma, llegamos a que la solución general de la ecuación es

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + \frac{w_0}{24EI}x^4.$$

Ahora bien, las condiciones $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$ dan $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$, mientras que las condiciones restantes, $y(L) = 0$ y $y'(L) = 0$, aplicadas a $y(x) = c_3x^2 + c_4x^3 + (w_0/24EI)x^4$ originan las ecuaciones

$$c_3L^2 + c_4L^3 + \frac{w_0}{24EI}L^4 = 0$$

$$2c_3L + 3c_4L^2 + \frac{w_0}{6EI}L^3 = 0.$$

Al resolver este sistema se obtiene $c_3 = w_0L^2/24EI$ y $c_4 = -w_0L/12EI$. Entonces, la desviación es

$$y(x) = \frac{w_0L^2}{24EI}x^2 - \frac{w_0L}{12EI}x^3 + \frac{w_0}{24EI}x^4 = \frac{w_0}{24EI}x^2(x - L)^2.$$

Si $w_0 = 24EI$ y $L = 1$, se obtiene la gráfica de la elástica de la figura 5.25. ■

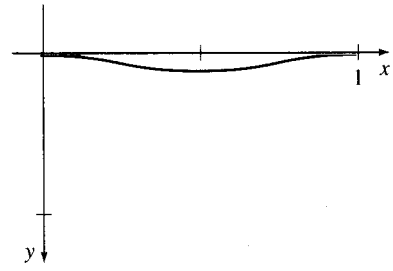


FIGURA 5.25

Valores propios y funciones propias (eigenvalores y eigenfunciones) En las aplicaciones hay muchos problemas, que son problemas de valor en la frontera en dos puntos, donde interviene una ecuación diferencial que contiene un parámetro λ. Se trata de hallar los valores de λ para los cuales el problema de valor en la frontera tenga soluciones no triviales.

EJEMPLO 2 **Soluciones no triviales de un problema de valor en la frontera**

Resuelva el problema de valor en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

SOLUCIÓN Consideraremos tres casos: $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ y $\lambda > 0$.

Caso I. Cuando $\lambda = 0$, la solución de $y'' = 0$ es $y = c_1x + c_2$. Las condiciones $y(0) = 0$ y $y(L) = 0$ implican, a su vez, que $c_2 = 0$ y $c_1 = 0$; por consiguiente, cuando $\lambda = 0$, la única solución al problema de valor en la frontera es la trivial $y = 0$.

Caso II. Cuando $\lambda < 0$, $y = c_1 \cosh \sqrt{-\lambda}x + c_2 \operatorname{senh} \sqrt{-\lambda}x$.* De nuevo, $y(0) = 0$ da $c_1 = 0$ y así $y = c_2 \operatorname{senh} \sqrt{-\lambda}x$. La segunda condición, $y(L) = 0$ obliga a que $c_2 \operatorname{senh} \sqrt{-\lambda}L = 0$. Puesto que $\operatorname{senh} \sqrt{-\lambda}L \neq 0$, se debe cumplir $c_2 = 0$; por consiguiente, $y = 0$.

Caso III. Cuando $\lambda > 0$, la solución general de $y'' + \lambda y = 0$ es $y = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}x$. Como antes, $y(0) = 0$ conduce a $c_1 = 0$, pero $y(L) = 0$ implica que

$$c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}L = 0.$$

Si $c_2 = 0$, se tiene $y = 0$; empero, si $c_2 \neq 0$, entonces $\operatorname{sen} \sqrt{\lambda}L = 0$. La última condición indica que el argumento de la función seno ha de ser un múltiplo entero de π:

$$\sqrt{\lambda}L = n\pi \quad \text{o sea} \quad \lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \; n = 1, 2, 3, \ldots .$$

*Se ve raro $\sqrt{-\lambda}$, pero no olvidemos que $\lambda < 0$ equivale a $-\lambda > 0$.

Por lo tanto, para todo real c_2 distinto de cero, $y = c_2 \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ es una solución del problema para cada n. Puesto que la ecuación diferencial es homogénea, no necesitamos escribir c_2 si así lo deseamos; en otras palabras, para un numero dado de la sucesión

$$\frac{\pi^2}{L^2}, \frac{4\pi^2}{L^2}, \frac{9\pi^2}{L^2}, \ldots,$$

la función *correspondiente* en la sucesión

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{L}x, \operatorname{sen}\frac{2\pi}{L}x, \operatorname{sen}\frac{3\pi}{L}x, \ldots$$

es una solución no trivial del problema original. ■

Los números $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ para los que el problema de valor en la frontera del ejemplo 2 tiene soluciones no triviales **se** llaman **valores característicos o valores propios.** Las soluciones que se basan en esos valores de λ_n, como $y_n = c_2 \operatorname{sen}(n\pi x/L)$, o simplemente $y_n = \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ se llaman **funciones características, funciones propias.**

Curvatura de una columna vertical esbelta En el siglo XVIII Leonhard Euler fue uno de los primeros matemáticos en estudiar un problema de valores propios al analizar cómo se curva una columna elástica esbelta sometida a una fuerza axial de compresión.

Examinemos una columna vertical larga y esbelta de sección transversal uniforme y longitud L. Sea $y(x)$ la curvatura de la columna al aplicarle una fuerza vertical de compresión, o carga, P, en su extremo superior (Fig.5.26). Al comparar los momentos flexionantes en cualquier punto de la columna obtenemos

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Py \quad \text{o sea} \quad EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0, \tag{5}$$

donde E es el módulo de elasticidad de Young e I es el momento de inercia de una sección transversal con respecto a una recta vertical por el centroide.

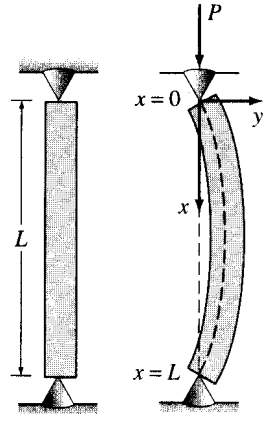


FIGURA 5.26

EJEMPLO 3 Un problema de valores propios

Determine la desviación de una columna homogénea, delgada y vertical de altura L, sometida a una carga axial P constante. La columna se encuentra articulada en sus dos extremos.

SOLUCIÓN El problema de valor en la frontera que se debe resolver es

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

$y = 0$ es una solución válida para este problema. Tiene la sencilla interpretación que si la carga P no es suficientemente grande, no hay deflexión. La pregunta, entonces, es la siguiente: ¿para qué valores de P se curva la columna? En términos matemáticos: ¿para qué valores de P el problema de valor en la frontera tiene soluciones no triviales?

Hacemos la sustitución $\lambda = P/EI$ y vemos que

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

es idéntica al problema del ejemplo 2. En el caso III de ese problema vemos que las curvas de desviación son $y_n(x) = c_2 \operatorname{sen}(n\pi x/L)$, que corresponden a los valores propios $\lambda_n = P_n/EI = n^2\pi^2/L^2$, $n = 1, 2, 3 \ldots$. Esto quiere decir, físicamente, que la columna se desvia sólo cuando la fuerza de compresión tiene uno de los valores $P_n = n^2\pi^2EI/L^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Esas fuerzas se llaman **cargas críticas.** La curva de deflexión que corresponde a la mínima carga crítica, $P_1 = \pi^2EI/L^2$ se denomina **carga de Euler y es** $y_1(x) = c_2 \operatorname{sen}(\pi x/L)$; esta función se conoce como **primer modo de desviación.** ■

En la figura 5.27 vemos las curvas de desviación del ejemplo 3, que corresponden a $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$. Si la columna original tiene algún tipo de restricción física o *guía* en $x = L/2$, la carga critica mínima será $P_2 = 4\pi^2EI/L^2$, y la curva de deflexión será la de la figura 5.27(b). Si se ponen guías a la columna en $x = L/3$ y en $x = 2L/3$, la columna no se desviará sino hasta aplicarle la carga crítica $P_3 = 9\pi^2EI/L^2$ y la curva de desviación será la que se ilustra en la figura 5.27(c). ¿Dónde se deberían poner guías en la columna para que la carga de Euler sea P_4?

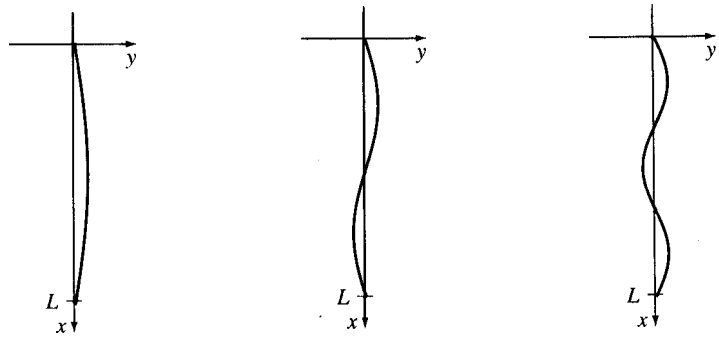


FIGURA 5.27

Juego de la cuerda La simple ecuación diferencial lineal y de segundo orden

$$y'' + Ay = 0 \tag{6}$$

sirve de nuevo como modelo matemático. En la sección 5.1 la vimos en las formas $d^2x/dt^2 + (k/m)x = 0$ y $d^2q/dt^2 + (1/LC)q = 0$ como modelos respectivos del movimiento armónico simple de un sistema de resorte y masa, y la respuesta armónica simple de un circuito en serie. Surge cuando el modelo de curvatura de una columna delgada en (5) se escribe en la forma $d^2y/dx^2 + (P/EI)y = 0$, que es igual a (6). Una vez más, nos encontramos con la misma ecuación (6) en esta sección: como modelo que define la curva de deflexión o la forma y(x) que adopta una cuerda que gira. El caso físico es análogo a cuando dos personas sujetan una cuerda de saltar y la giran en forma sincrónica [Fig.5.28(a) y (b)].

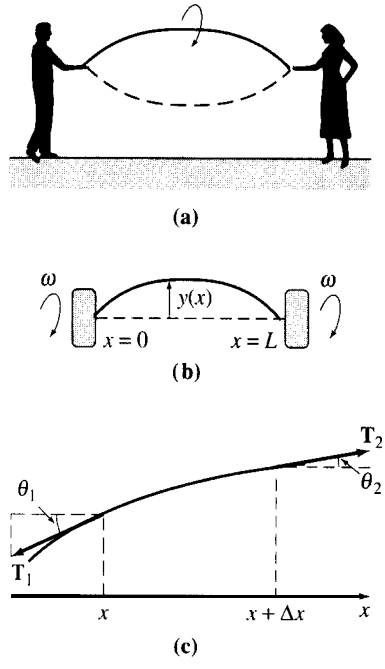


FIGURA 5.28

Supongamos que una cuerda de longitud L y densidad lineal constante ρ (en masa por unidad de longitud) se estira a lo largo del eje x y se fija en x = 0 y $x = L$. A continuación, esa cuerda se pone a girar respecto a su eje a una velocidad angular constante w. Examinemos un tramo de la cuerda, en el intervalo [x, $x + \Delta x$], donde es pequeño. Si la magnitud T de la tensión T que actúa en dirección tangencial a la cuerda es constante en su longitud, podemos obtener la ecuación diferencial que deseamos igualando dos expresiones de la fuerza neta que actúa sobre la cuerda en el intervalo [x, $x + \Delta x$]. Primero, vemos en la figura 5.28(c) que la fuerza neta vertical es

$$F = T\operatorname{sen}\theta_2 - T\operatorname{sen}\theta_1. \tag{7}$$

Cuando los ángulos θ_1 y θ_2, expresados en radianes, son pequeños, sen $\theta_2 \approx \tan \theta_2$, y sen $\theta_1 \approx \tan \theta_1$. Además, puesto que tan θ_2 y tan θ_1 son, a su vez, las pendientes de las líneas que contienen a los vectores $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_1$, también podremos escribir

$$\tan \theta_2 = y'(x + \Delta x) \qquad \text{y} \qquad \tan \theta_1 = y'(x).$$

De esta forma, la ecuación (7) se transforma en

$$F \approx T[y'(x + \Delta x) - y'(x)]. \tag{8}$$

Luego podemos obtener una forma distinta de la misma fuerza neta recurriendo a la segunda ley de Newton, $F = ma$. En este caso, la masa de la cuerda en el intervalo es $m = \rho \Delta x$; la aceleración centrípeta de un cuerpo que gira con velocidad angular ω en un círculo de radio r es $a = r\omega^2$. Si Δx es pequeño, podemos hacer r = y. Así, la fuerza vertical neta también está expresada aproximadamente por

$$F \approx -(\rho \Delta x) y \omega^2, \tag{9}$$

donde el signo menos proviene de que la aceleración apunta en dirección opuesta a la dirección positiva de las y. Ahora, igualando las ecuaciones (8) y (9),

$$T[y'(x + \Delta x) - y'(x)] \approx -(\rho \Delta x) y \omega^2 \quad \text{o sea} \quad T\frac{y'(x + \Delta x) - y'(x)}{\Delta x} \approx -\rho \omega^2 y. \tag{10}$$

Cuando Δx tiende a cero, el cociente de la diferencia $[y'(x + \Delta x) - y'(x)]/\Delta x$, en la ecuación (10), se puede aproximar por la segunda derivada, d^2y/dx^2. Por último llegamos al modelo

$$T\frac{d^2y}{dx^2} = -\rho \omega^2 y \qquad \text{o sea} \qquad T\frac{d^2y}{dx^2} + \rho \omega^2 y = 0. \tag{11}$$

Dado que la cuerda está tija en sus extremos x = 0 y $x = L$, esperamos que la solución y(x) de la última de las ecuaciones en (ll) también satisfaga las condiciones en la frontera $y(0) = 0$ y $y(L) = 0$.

EJERCICIOS 5.2

En los problemas 1 a 4 la viga tiene longitud L y w_0 es constante.

1. **a)** Resuelva la ecuación (4) cuando la viga está empotrada en su extremo izquierdo y libre en el derecho, y $w(x) = w_0$, $0 < x < L$.
   b) Con una graficadora, trace la elástica de la viga cuando $w_0 = 24EI$ y $L = 1$.
2. **a)** Resuelva la ecuación (4) cuando la viga sólo está apoyada en ambos extremos y $w(x) = w_0$, $0 < x < L$.
   b) Con una graficadora, trace la elástica de la viga cuando $w_0 = 24EI$ y $L = 1$.
3. **a)** Resuelva la ecuación (4) cuando la viga está empotrada en su extremo izquierdo y sólo apoyada en el derecho, y $w(x) = w_0$, $0 < x < L$.
   b) Con una graficadora, trace la elástica de la viga cuando $w_0 = 48EI$ y $L = 1$.

4. a) Resuelva la ecuación (4) cuando la viga está empotrada en su extremo izquierdo, sólo apoyada en el derecho y $w(x) = w_0 \operatorname{sen}(\pi x/L)$, $0 < x < L$.
   b) Con una graficadora, trace la elástica de la viga cuando $w_0 = 2\pi^3 EI$ y $L = 1$.
5. a) Determine la desviación máxima de la viga en voladizo (o cantilíver) del problema 1.
   b) ¿Cómo se compara la desviación máxima de una viga de la mitad de la longitud con el valor obtenido en la parte a)?
6. a) Calcule la desviación máxima de la viga simplemente apoyada del problema 2.
   b) ¿Cómo se compara la desviación máxima de la viga simplemente apoyada con la desviación de la viga de extremos empotrados del ejemplo 1?
7. Una viga en voladizo, de longitud L, está empotrada en su extremo derecho y se aplica al extremo izquierdo una fuerza horizontal de tensión de P lb. Si el origen se sitúa en su extremo libre (Fig. 5.29), se puede demostrar que la desviación y(x) de la viga satisface la ecuación diferencial

$$EIy'' = Py - w(x)\frac{x}{2}.$$

Calcule la desviación de la viga en voladizo cuando $w(x) = w_0 x$, $0 < x < L$ y $y(0) = 0$, y'(L) = 0.

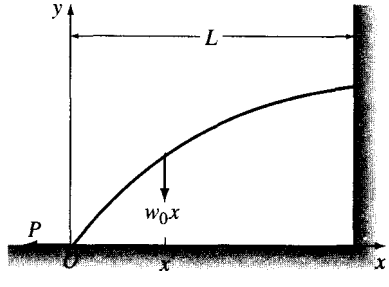


FIGURA 5.29

8. Si se aplica una fuerza de compresión en lugar de la de tensión en el extremo libre de la viga del problema 7, la ecuación diferencial de la elástica es

$$EIy'' = -Py - w(x)\frac{x}{2}.$$

Resuelva esta ecuación cuando $w(x) = w_0 x$, $0 < x < L$ y $y(0) = 0$, y'(L) = 0.

En los problemas 9 a 22 determine los valores propios y las funciones propias del respectivo problema de valor en la frontera.

9. $y'' + Ay = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$

10. $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

11. $y'' + Ay = 0$, $y'(0) = 0$, $y(L) = 0$

12. $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

13. $y'' + Ay = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$

14. $y'' + \mathbf{Ay} = \mathbf{0},\ y(-\pi) = \mathbf{0},\ y(\pi) = \mathbf{0}$
15. $y'' + \mathbf{2y'} + (\lambda + 1)y = \mathbf{0};\ y(0) = \mathbf{0},\ \mathbf{y(5) = 0}$
16. $\mathbf{y''} + (\lambda + 1)y = 0,\ y'(O) = 0,\ y'(l) = 0$
17. $\mathbf{y''} + \lambda^2 y = \mathbf{0},\ y(0) = \mathbf{0},\ \mathbf{y(L) = 0}$
18. $\mathbf{y''} + \lambda^2 y = \mathbf{0},\ y(0) = \mathbf{0},\ y'(3\pi) = \mathbf{0}$
19. $x^2y'' + xy' + Ay = 0,\ y(1) = 0,\ y(e^{\pi}) = 0$
20. $x^2y'' + xy' + Ay = 0,\ y'(e^{-1}) = 0,\ y(1) = 0$
21. $x^2y'' + xy' + Ay = 0,\ y'(l) = 0,\ y'(e^2) = 0$
22. $x^2y'' + 2xy' + Ay = 0,\ y(1) = 0,\ y(e^2) = 0$

23. Demuestre que las funciones propias del problema de valor en la frontera

$$y'' + Ay = 0, \qquad y(0) = 0,\ \ y(1) + y'(1) = 0$$

son $y_n = \text{sen } \sqrt{\lambda_n}x$, en donde los valores propios λ_n del problema son $\lambda_n = x_n^2$ donde los x_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ son las raíces ***positivas*** consecutivas de la ecuación tan $\sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda}$.

24. **a)** Convénzase, usando una graticadora, de que la ecuación tan $x = -x$ tiene una cantidad infinita de raíces. Explique por qué se pueden pasar por alto las raíces negativas de la ecuación y por qué $\lambda = 0$ no es valor propio en el problema 23, aun cuando es una raíz obvia de la ecuación tan $\sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda}$.

b) Aplique un procedimiento numérico o un sistema algebraico de computación para aproximar los primeros cuatro valores propios, λ_1, λ_2, λ_3 y λ_4.

25. Se tiene el problema de valor en la frontera que presentamos como modelo matemática de la forma de una cuerda de saltar:

$$T\frac{d^2y}{dx^2} + \rho\omega^2 y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

Con T y ρ constantes, defina las velocidades críticas de rotación angular, ω_n, como los valores de w para los que el problema de valor en la frontera tiene soluciones no triviales. Calcule las velocidades críticas ω_n y las curvas correspondientes de desviación, $y_n(x)$.

26. Cuando la magnitud de la tensión T no es constante, un modelo de la curva de desviación o forma y(x) que toma una cuerda rotatoria es

$$\frac{d}{dx}\left[T(x)\frac{dy}{dx}\right] + \rho\omega^2 y = 0.$$

Suponga que $1 < x <$ e, y que $T(x) = x^2$.

a) Si $y(1) = 0$, y(e) = 0 y $\rho\omega^2 > 0.25$, halle las velocidades críticas ω_n y las curvas correspondientes de desviación $y_n(x)$.

b) En la ecuación de $y_n(x)$ habrá una constante arbitraria, por ejemplo, c_2. Con una graficadora trace las curvas de desviación en el intervalo [1, e], para $n = 1, 2, 3$. Haga $c_2 = 1$.

27. Se tienen dos esferas concéntricas de radio $r = a$ y $r = b$, $a < b$ (Fig. 5.30). La temperatura $u(r)$ en la región entre ellas está determinada por el problema de valor en la frontera

$$r\frac{d^2u}{dr^2} + 2\frac{du}{dr} = 0, \qquad u(a) = u_0, \quad u(b) = u_1,$$

donde u_0 y u_1 son constantes. Despeje $u(r)$.

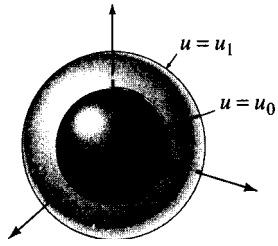


FIGURA 5.30

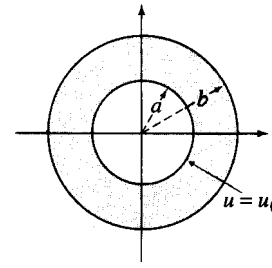


FIGURA 5.3 1

28. La temperatura $u(r)$ en el anillo circular de la figura 5.3 1 está definida por el problema de valor en la frontera

$$r\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} = 0, \qquad u(a) = u_0, \quad u(b) = u_1,$$

donde u_0 y u_1 son constantes. Demuestre que

$$u(r) = \frac{u_0 \ln(r/b) - u_1 \ln(r/a)}{\ln(a/b)}.$$

Problemas para discusión

29. Para el problema de valor en la frontera

$$y'' + 16y = 0, \qquad y(0) = y_0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y_1.$$

indique si es posible hallar valores de y_0 y y_1 tales que el problema tenga a) exactamente una solución no trivial; b) más de una solución; c) ninguna solución, y d) la solución trivial.

30. Se tiene el problema de valor en la frontera

$$y'' + 16y = 0, \qquad y(0) = 1, \; y(L) = 1.$$

Señale si es posible calcular valores de $L > 0$ tales que el problema tenga a) exactamente una solución no trivial; b) más de una solución; c) ninguna solución, y d) la solución trivial.

5.3 ECUACIONES NO LINEALES

■ *Resortes lineales y no lineales* ■ *Resortes duros y suaves*
■ *Ecuación diferencial de un péndulo no lineal* ■ *Linealización*
■ *Ecuación diferencial de un cable colgado* ■ *La catenaria* ■ *Movimiento de un cohete*

Resortes no lineales El modelo matemático en la ecuación (1) de la sección 5.1 tiene la forma

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + F(x) = 0, \tag{1}$$

donde $F(x) = kx$. Como x representa el desplazamiento de la masa respecto a su posición de equilibrio, $F(x) = kx$ es la ley de Hooke; esto es, la fuerza que ejerce el resorte, que tiende a regresar la masa a su posición de equilibrio. Un resorte que ejerce una fuerza lineal de restitución $F(x) = kx$ se llama **resorte lineal;** pero los resortes casi nunca son perfectamente lineales. Según cómo se fabriquen y el material que se use, un resorte puede ser desde "flexible" o suave, hasta "rígido" o duro, y su fuerza de restitución puede variar desde algo menos a algo más de la que determina la ley lineal. En el caso del movimiento libre, si suponemos que un resorte no envejecido tiene algunas características no lineales, sería lógico suponer que la fuerza de restitución $F(x)$ es proporcional, por ejemplo, al cubo del desplazamiento x de la masa con respecto a su posición de equilibrio, o que $F(x)$ es una combinación lineal de potencias del desplazamiento, como la de la función no lineal $F(x) = \text{kx} + k_1x^3$. Un resorte cuyo modelo matemático presenta una fuerza no lineal de restitución, como

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx^3 = 0 \quad \text{o sea} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx + k_1x^3 = 0, \tag{2}$$

se llama **resorte no lineal.** Además, hemos descrito modelos matemáticos en que el amortiguamiento del movimiento era proporcional a la velocidad instantánea dx/dt y la fuerza de restitución del resorte estaba determinada por la función lineal $F(x) = kx$; pero sólo se trataba de suposiciones. En los casos más reales, el amortiguamiento puede ser proporcional a alguna potencia de la velocidad instantánea, dx/dt. La ecuación diferencial no lineal

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\left|\frac{dx}{dt}\right|\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{3}$$

es un modelo de un sistema libre de resorte y masa, con un amortiguamiento proporcional al cuadrado de la velocidad. Es posible imaginar otros tipos de modelo: amortiguamiento lineal y fuerza de restitución no lineal, amortiguamiento no lineal y fuerza de restitución no lineal, etcétera. El hecho es que las características no lineales de un sistema físico originan un modelo matemático no lineal.

Obsérvese que, en la ecuación (2), $F(x) = kx^3$ y $F(x) = kx + k_1x^3$ son funciones impares de x. Para ver por qué una función polinomial que sólo contiene potencias impares de x es un modelo razonable de la fuerza de restitución, expresaremos F en forma de una serie de potencias centrada en la posición de equilibrio $x = 0$:

$$F(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots.$$

Cuando los desplazamientos x son pequeños, los valores de x^n son despreciables si n es suficientemente grande. Si truncamos la serie de potencias en, digamos, el cuarto término, entonces

$$F(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3.$$

Para que la fuerza en $x > 0$ (F(x) = $c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$) y la fuerza en $-x < 0$ ($F(-x) = c_0 - c_1(x) + c_2x^2 - c_3x^3$) tengan la misma magnitud y direcciones opuestas, se debe cumplir $F(-x) = -F(x)$. Esto quiere decir que F es una función impar, de modo que $c_0 = 0$ y $c_2 = 0$, y así $F(x) = c_1(x) + c_3x^3$. Si hubiéramos empleado sólo los dos primeros términos de la serie, habríamos llegado a $F(x) = c_1x$ con el mismo argumento. Para fines explicativos, escribiremos $c_1 = k$ y $c_2 = k_1$. Se dice que una fuerza de restitución con potencias mixtas, como $F(x) = kx + k_1x^2$, así como las oscilaciones que resultan, son no simétricas.

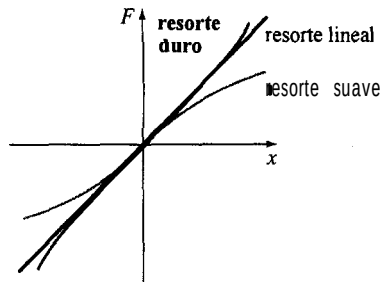


FIGURA 5.32

Resortes duros y suaves Examinemos con más detalle la ecuación (1), cuando la fuerza de restitución está expresada por $F(x) = kx + k_1x^3$, $k > 0$. En la figura 5.32 aparecen las gráficas de tres tipos de fuerzas de restitución. Se dice que el resorte es duro si $k_1 > 0$, y suave si $k_1 < 0$. En el ejemplo 1 mostraremos estos dos casos especiales de la ecuación diferencial $m\,d^2x/dt^2 + kx + k_1x^3 = 0$, $m > 0$, $k > 0$.

EJEMPLO 1 **Comparación de resortes duros y suaves**

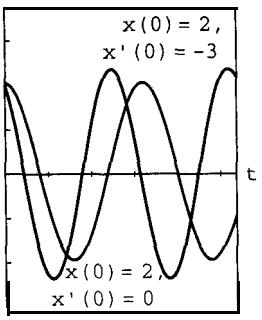
Las ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + x^3 = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

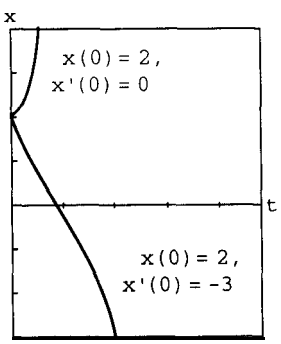
Y

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x - x^3 = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

son casos especiales de la ecuación (2) y los modelos de un resorte duro y uno suave, respectivamente. La figura 5.33(a) muestra dos soluciones de (4) y la figura 5.33(b) muestra dos soluciones de (5), obtenidas con un programa para resolver ecuaciones. Las curvas en negro son las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales x(O) = 2, x'(O) = -3, y las curvas en gris son las soluciones que cumplen x(O) = 2, x'(O) = 0. Estas curvas solución



a) Resorte duro



b) Resorte suave

FIGURA 5.33

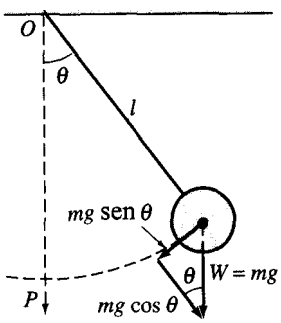


FIGURA 5.34

indican que el movimiento de una masa en el resorte duro es oscilatorio, mientras que en el resorte suave no lo es. Pero debemos tener cuidado al llegar a conclusiones basadas sólo en dos curvas de solución. Consúltese también el problema 2 de los ejercicios 5.3. ■

Péndulo no lineal Todo objeto que oscila se llama **péndulo físico.** El **péndulo simple** es un caso especial de péndulo físico y consiste en una varilla de longitud l con una masa m unida a su extremo inferior. Al describir el movimiento de un péndulo simple en el plano vertical, se establecen las hipótesis simplificatorias de que la masa de la varilla es insignificante y que no actúan fuerzas externas, de amortiguamiento ni de impulso. El ángulo θ de desplazamiento del péndulo medido respecto a la vertical (Fig. 5.34), se considera positivo cuando está hacia la derecha de OP y negativo cuando está a la izquierda. Ya sabemos que el arco s, de un círculo de radio l, se relaciona con el ángulo central θ por la fórmula $s = l\theta$; por lo tanto, la aceleración angular es

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

De acuerdo *con* la segunda ley de Newton,

$$F = ma = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

En la figura 5.34 tenemos que la componente tangencial de la fuerza, debido al peso W, es mg sen θ. Igualamos las dos expresiones de la fuerza tangencial y obtenemos $ml\,d^2\theta/dt^2 = -mg$ sen θ, o sea

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0. \tag{6}$$

Linealización Por la presencia de sen θ, el modelo de la ecuación (6) es no lineal. Para tratar de comprender el comportamiento de las soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales de orden superior, a veces se trata de simplificar el problema, reemplazando los términos no lineales con algunas aproximaciones. Por ejemplo, la serie de Maclaurin para el sen θ es

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots,$$

y entonces, si empleamos la aproximación sen $\theta \approx \theta - \theta^3/6$, la ecuación (6) se transforma en $d^2\theta/dt^2 + (g/l)\theta - g/6l)\theta^3 = 0$. Esta ecuación es igual a la segunda ecuación no lineal de (2), donde $m = 1$, $k = g/l$ y $k_1 = -g/6l$; sin embargo, si suponemos que los desplazamientos θ son lo suficientemente pequeños para justificar el empleo de la sustitución sen $\theta \approx \theta$, la ecuación (6) se transforma en

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0. \tag{7}$$

Si hacemos $\omega^2 = g/l$, reconocemos en (7) la ecuación diferencial (2) de la sección 5.1, que describe las vibraciones no amortiguadas de un sistema lineal de resorte y masa. En otras palabras, la ecuación (7) nuevamente es la ecuación lineal básica $y'' + \lambda y = 0$, que describimos en la página 228 de la sección 5.2; en consecuencia, se dice que la ecuación (7) es una **linealización** de la ecuación (6). Puesto que la solución general de (7) es $\theta(t) = c_1 \cos \omega t + c_2$ sen wt, esa linealización nos sugiere que el movimiento del péndulo descito por (6), es periódico para las condiciones iniciales compatibles con oscilaciones pequeñas.

EJEMPLO 2 **Péndulo no lineal**

Las gráficas de la figura 5.35(a) se obtuvieron con ayuda de un programa que resuelve ecuaciones y que representa las curvas de solución de la ecuación (6) cuando $\omega^2 = 1$. La curva de gris representa la solución de (6) que satisface las condiciones iniciales $\theta(0) = \frac{1}{2}$, e'(O) = $\frac{1}{2}$, mientras que la gráfica en negro es la solución que satisface a $\theta(0) = \frac{1}{2}$, $\theta'(0) = 2$. La curva de gris representa una solución periódica, el péndulo que oscila hacia uno y otro lado [Fig. 5.35(b)], con una amplitud aparente $A \leq 1$. La curva en negro muestra que θ crece sin límite a medida que aumenta el tiempo. A partir del mismo desplazamiento inicial, el péndulo tiene una velocidad inicial con la magnitud suficiente para mandarlo despedido sobre el centro de giro; en otras palabras, da vueltas alrededor de su pivote [Fig. 5.35(c)]. Cuando no hay amortiguamiento, el movimiento continúa indefinidamente en ambos casos. ■

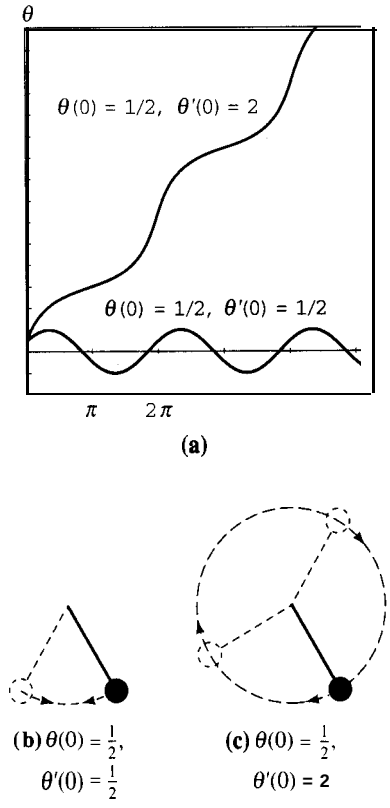


FIGURA 5.35

Cable colgado Supongamos que un cable cuelga sujeto a la acción de su propio peso. Como vemos en la figura 5.36(a), un modelo físico podría ser un conductor telefónico largo tendido entre dos postes. Nuestra meta es deducir un modelo matemático que describa la forma que adopta el cable colgante.

Para comenzar, supondremos que se define al eje y en la figura 5.36(b) pasando por el punto mínimo P_1 de la curva y que el eje x está a unidades abajo de P_1. Examinemos sólo la parte del cable que está entre el punto mínimo P_1 y un punto arbitrario P_2. Sobre el cable actúan tres fuerzas: el peso del segmento P_1P_2 y las tensiones $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ en los puntos P_1 y P_2,

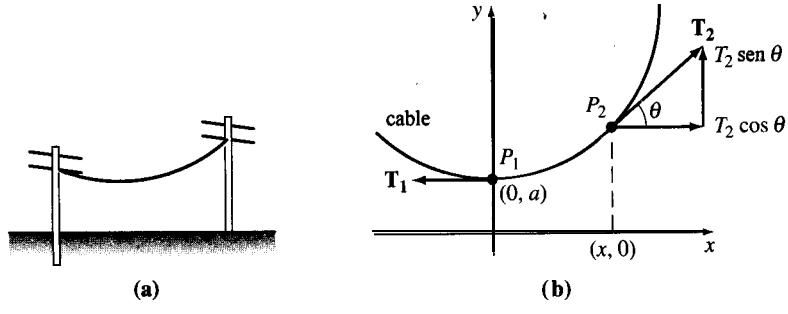


FIGURA 5.36

respectivamente. Si w es la densidad lineal del cable (expresada, por ejemplo, en lb/ft) y s la longitud del segmento P_1P_2, su peso será ws. La tensión $\mathbf{T}_2$ se puede descomponer en las direcciones horizontal y vertical, y las correspondientes cantidades escalares son $T_2 \cos\theta$ y T_2 sen θ. Puesto que el sistema está en equilibrio podemos escribir,

$$|\mathbf{T}_1| = T_1 = T_2 \cos\theta \qquad \text{y} \qquad ws = T_2 \operatorname{sen}\theta.$$

Dividimos las dos últimas ecuaciones y vemos que tan $\theta = ws/T_1$. Esto es,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ws}{T_1}. \tag{8}$$

Dado que el arco entre los puntos P_1 y P_2 tiene la longitud

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx, \tag{9}$$

de acuerdo con el teorema fundamental del cálculo, la derivada de (9) es

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{10}$$

Derivamos (8) con respecto a x, aplicamos la ecuación (10) y obtenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_1}\frac{ds}{dx} \qquad \text{o sea} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_1}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{11}$$

Según la figura 5.36 cabría concluir que la forma que adopta el conductor colgante es parabólica. En el ejemplo siguiente veremos que no es así; la curva que forma el cable colgado se llama **catenaria.** Antes de proseguir, obsérvese que la ecuación diferencial no lineal (ll) es una de las ecuaciones $F(y, y', y'') = 0$ que describimos en la sección 4.9, y podemos resolverla mediante sustitución.

EJEMPLO 3 **Problema de valor inicial**

De acuerdo con la posición del eje y en la figura 5.36(b), las condiciones iniciales asociadas con la segunda de las ecuaciones diferenciales (11) son $y(0)$ = ay y'(O)= 0. Si sustituimos $u = y'$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_1}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \text{ se transforma en } \frac{du}{dx} = \frac{w}{T_1}\sqrt{1 + u^2}.$$

Separamos variables y

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{w}{T_1}\int dx \qquad \text{da} \qquad \operatorname{senh}^{-1} u = \frac{w}{T_1}x + c_1.$$

Pero y'(O) = 0 equivale a $u(0) = 0$. Como $\operatorname{senh}^{-1} 0 = 0$, entonces $c_1 = 0$, así que $u = \operatorname{senh}(wx/T_1)$. Por último, al integrar

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{senh} \frac{w}{Tl} x \quad \text{obtenemos} \quad y = \frac{T_1}{w} \cosh \frac{w}{T_1} x + c_2.$$

Si aplicamos $y(0) = a$, $\cosh 0 = 1$, la última ecuación da $c_2 = a - T_1/w$. Vemos así que la forma del cable colgante está definida por

$$y = \frac{T_1}{w} \cosh \frac{w}{T_1} x + a - \frac{T_1}{w}.$$

■

Si en el ejemplo 3 hubiéramos tenido la astucia de elegir al principio $a = T_1/w$, la solución del problema habría sido simplemente el coseno hiperbólico $y = (T_1/w) \cosh(wx/T_1)$.

Movimiento de un cohete En la sección 1.3 expusimos que la ecuación diferencial de un cuerpo en caída libre de masa m cercano a la superficie de la Tierra, es

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = -mg \text{ 0 simplemente } \frac{d^2s}{dt^2} = -g,$$

donde s representa la distancia de la superficie terrestre al objeto y se considera que la dirección positiva es hacia arriba. En otras palabras, lo que se supone aquí es que la distancias que recorre el objeto es pequeña en comparación con el radio R de la Tierra; dicho de otra manera, la distancia y del centro de la Tierra al objeto es aproximadamente igual a R. Si, por otro lado, la distancia y a un objeto como un cohete o una sonda espacial es grande en comparación con R, se puede combinar la segunda ley del movimiento de Newton con la ley de la gravitación universal (también de Newton), para deducir una ecuación diferencial en la variable y.

Supongamos que se dispara un cohete en dirección vertical desde la superficie terrestre (Fig. 5.37). Si la dirección positiva es hacia arriba y no se toma en cuenta la resistencia del aire, la ecuación diferencial del movimiento después de quemar el combustible, es

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -k \frac{Mm}{y^2} \quad \text{o sea} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k \frac{M}{y^2}, \tag{12}$$

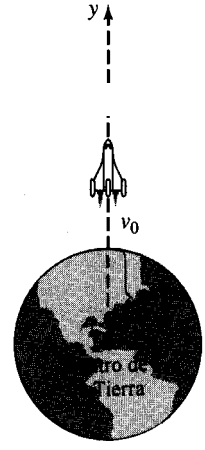


FIGURA 5.37

donde k es una constante de proporcionalidad, y es la distancia del centro de la Tierra al cohete, M es la masa de la Tierra y m es la masa del cohete. Para calcular la constante k aprovechamos que cuando $y = R$, $kMm/R^2 = mg$, o bien, $k = gR^2/M$. Entonces, la última de las ecuaciones (12) se transforma en

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g\frac{R^2}{y^2}. \tag{13}$$

EJEMPLO 4 Velocidad de escape

Como $v = dy/dt$ es la velocidad, podemos expresar la aceleración del cohete de los párrafos anteriores en la forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = v\frac{dv}{dy}.$$

Por lo tanto, la ecuación (13) se transforma en una ecuación de primer orden en v; esto es,

$$v\frac{dv}{dy} = -g\frac{R^2}{y^2}. \tag{14}$$

Esta última ecuación se puede resolver por separación de variables. A partir de

$$\int v\, dv = -gR\int y^{-2}\, dy \text{ obtenemos } \quad \frac{v^2}{2} = g\frac{R^2}{y} + c. \tag{15}$$

Si suponemos que la velocidad del cohete es $v = v_0$ cuando se acaba el combustible y que $y \approx R$ en ese momento, podemos aproximar el valor de c. Con la ecuación (15) obtenemos $c = -gR + v_0^2/2$. Al sustituir ese valor de nuevo en esa ecuación y multiplicar por dos la ecuación resultante, se obtiene

$$v^2 = 2g\frac{R^2}{y} - 2gR + v_0^2. \tag{16}$$

El lector podrá objetar que no hemos resuelto la ecuación diferencial original (13) en función de y. En realidad, la solución particular (16) de la ecuación (14) suministra bastante información. Es la solución que se puede emplear para determinar la velocidad mínima (llamada *velocidad de* escupe), necesaria para que un cohete salga de la atracción gravitatoria terrestre. Como hemos recorrido el tramo más diñcil para llegar a (16), dejaremos la determinación real de la velocidad de escape de la Tierra como ejercicio. Véase el problema 14 de los ejercicios 5.3. ■

EJERCICIOS 5.3

En los problemas 1 a 4, cada ecuación diferencial es un modelo de un sistema no amortiguado de resorte y masa, en que la fuerza de restitución, F(x) en (1) es no lineal. En cada problema

emplee un programa para resolver ecuaciones para obtener las curvas de solución que satisfagan las condiciones iniciales dadas. Si las soluciones son periódicas, utilice la curva de solución para estimar el periodo T de las oscilaciones.

1. $\frac{d^2x}{dt^2} + x^3 = 0$

   $x(0) = 1$, x'(O) = 1; $x(0) = \frac{1}{2}, x'(0) = -1$

2. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x - 16x^3 = 0$

   $x(0) = 1$, x'(O) = 1; $x(0) = -2$, x'(O) = 2

3. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2x - x^2 = 0$

   $x(0) = 1$, x'(O) = 1; $x(0) = \frac{3}{2}, x'(0) = -1$

4. $\frac{d^2x}{dt^2} + xe^{0.01x} = 0$

   $x(0) = 1$, x'(O) = 1; $x(0) = 3$, x'(O) = -1

5. Suponga que en el problema 3 la masa se suelta de una posición inicial x(O) = 1, con una velocidad inicial x'(O) = x_1. Use un programa para resolver ecuaciones para estimar el valor mínimo de $|x_1|$ en que el movimiento de la masa es aperiódico.
6. En el problema 3 suponga que la masa parte de una posición inicial x(O) = x_0, con una velocidad inicial x'(O) = 1. Use un programa a fm de estimar un intervalo, $a \leq x_0 \leq b$, para el cual el movimiento sea oscilatorio.
7. Calcule una linealización de la ecuación diferencial del problema 4.
8. El siguiente modelo es el de un sistema de resorte y masa no amortiguado no lineal:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8x - 6x^3 + x^5 = 0.$$

   Use un programa para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias a fin de describir la naturaleza de las oscilaciones del sistema que corresponden a las condiciones iniciales siguientes:

$$x(0) = 1, x'(0) = 1; \quad x(0) = -2, \text{ x'(O)} = 0.5; \quad x(0) = \sqrt{2}, x'(0) = 1;$$
$$x(0) = 2, x'(0) = 0.5; \quad x(0) = -2, x'(0) = 0; \quad x(0) = -\sqrt{2}, x'(0) = -1.$$

En los problemas 9 y 10, la ecuación diferencial respectiva es el modelo de un sistema de resorte y masa, amortiguado y no lineal.

a) Prediga el comportamiento de cada sistema cuando $t \to \infty$.
b) Use un programa en cada ecuación a fin de obtener las curvas de solución que satisfagan las condiciones iniciales dadas.

9. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x + x^3 = 0$

   x(O) = -3, x'(O) = 4; x(O) = 0, x'(O) = -8

10. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x - x^3 = 0$

$x(0) = 0$, x'(O) = $\frac{3}{2}$; $x(0) = -1$, X'(O) = 3

11. El modelo $mx'' + kx + k_1x^3 = F_0 \cos \omega t$ de un sistema de resorte y masa, no amortiguado y periódicamente forzado, se llama **ecuación diferencial de Duffing**. Se tiene el problema de valor inicial

$$x'' + x + k_1x^3 = 5 \cos t, \qquad x(0) = 1,\ x'(O) = 0.$$

Con un programa investigue el comportamiento del sistema con los valores de $k_1 > 0$ entre $k_1 = 0.01$ y $k_1 = 100$. Escriba sus conclusiones.

12. **a)** En el problema 11 determine los valores de $k_1 < 0$ para los cuales el sistema sea oscilatorio.

b) Para el problema de valor inicial

$$x'' + x + k_1x^3 = \cos\frac{3}{2}t, \qquad x(0) = 0, \quad x'(O) = 0.$$

Determine los valores de $k_1 < 0$ para los cuales el sistema es oscilatorio.

13. El modelo del péndulo libre amortiguado no lineal es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\lambda\frac{d\theta}{dt} + \omega^2 \operatorname{sen} \theta = 0.$$

Use un programa para investigar si el movimiento en los dos casos cuando $\lambda^2 - \omega^2 > 0$ y $\lambda^2 - \omega^2 < 0$ corresponde, respectivamente, a los casos sobreamortiguado y subamortiguado descritos en la sección 5.1, para sistemas de resorte y masa. Escoja las condiciones iniciales y los valores de λ y ω adecuados.

14. **a)** Con la ecuación (16) demuestre que la velocidad de escape del cohete es $v_0 = \sqrt{2gR}$. [Sugerencia: haga $y \to \infty$ en (16) y suponga que v > 0 para todo tiempo t.]

b) El resultado de la parte a) es válido para cualquier planeta del Sistema Solar. Use los valores g = 32 ft/s y $R = 4000$ mi para demostrar que la velocidad de escape en la Tierra es, aproximadamente, $v_0 = 25{,}000$ mik.

c) Calcule la velocidad de escape en la Luna, si allí la aceleración de la gravedad es $0.165g$ y $R = 1080$ mi.

15. En un ejercicio naval, un submarino S_2 persigue a un barco S_1 (Fig. 5.38). El barco S_1 comienza en el punto $(0, 0)$ en el momento $t = 0$ y sigue un rumbo recto (por el eje y) a la velocidad constante v_1. El submarino S_2 mantiene el contacto visual con S_1, lo cual se indica mediante la línea punteada L y al mismo tiempo viaja a velocidad constante, v_2, siguiendo una curva C. Suponga que S_2 comienza en el punto $(a, 0)$, $a > 0$, cuando $t = 0$ y L es tangente a C.

a) Determine un modelo matemático que describa la curva C.

[Sugerencia: $\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx}$, donde s es la longitud del arco medido sobre C.]

b) Calcule una solución explícita de la ecuación diferencial. Por comodidad, defina r = v_1/v_2.

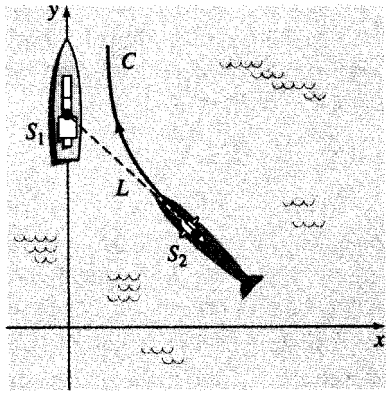


FIGURA 5.38

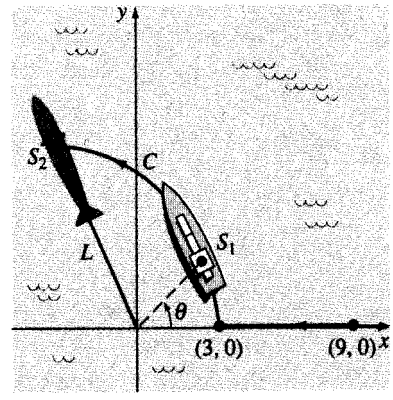


FIGURA 5.39

c) Examine los casos r > 1, r < 1 y $r = 1$ y determine si las trayectorias de S_1 y S_2 se intersectan alguna vez.

16. En otras maniobras navales, un destructor S_1 persigue a un submarino S_2. Considere que S_1, cuando está en $(9, 0)$ del eje x, detecta a S_2, que está en (0, 0), y que al mismo tiempo S_2 descubre a St. El capitán del destructor S_1 supone que el submarino intentara de inmediato una acción evasiva y que su nuevo curso probable será la recta indicada en la figura 5.39. Cuando S_1 está en (3, 0), cambia su curso en línea recta hacia el origen para seguir una curva de persecución C. Suponga que la velocidad del destructor es constante de 30 mi/h, y que la del submarino, como está sumergido, es de 15 mi/h, constante también.
a) Explique por qué el capitán espera que S_1 llegue a (3, 0) para ordenar el cambio de rumbo hacia la curva C.
b) Use coordenadas polares y deduzca una ecuación, $r = f(\theta)$, de C.
c) Explique por qué el tiempo en el cual el destructor intercepta al submarino, contado a partir de la detección inicial, debe ser menor de $(1 + e^{2\pi/\sqrt{3}})/5$.

Problemas para discusión

17. a) Se tiene el péndulo no lineal cuyas oscilaciones están definidas por (6). Use un programa para resolver ecuaciones ordinarias como auxiliar para determinar si un péndulo de longitud l oscilará con mayor rapidez en la superficie terrestre o en la superficie lunar. Utilice las mismas condiciones iniciales pero selecciónelas para que el péndulo realmente oscile.
b) ¿Cuál de los péndulos de la parte a) tiene mayor amplitud?
c) ¿Las conclusiones de las partes a) y b) cambian cuando se usa el modelo lineal (7)?

18. Considere el problema de valor inicial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \operatorname{sen}\,\theta = 0, \qquad \theta(0) = \frac{\pi}{12}, \quad \theta'(0) = -\frac{1}{3}$$

del péndulo no lineal. Como no podemos resolver la ecuación diferencial, resulta imposible obtener una solución explícita de este problema. Pero, supóngase que se desea determinar el primer momento, $t_1 > 0$, en que el péndulo, que parte de su posición inicial en el lado

derecho, llega a la posición *OP* en la figura 5.34; esto es, calcule la primera raíz positiva de $\theta(t) = 0$. En este problema y en el siguiente examinaremos varios modos de proseguir.

a) Estime t_1 resolviendo el problema lineal $d^2\theta/dt^2 + \theta = 0$,

$$\theta(0) = \frac{\pi}{12}, \theta'(0) = -\frac{1}{3}.$$

b) Use el método del ejemplo 3, sección 4.9, para hallar los primeros cuatro términos distintos de cero de una solución en forma de serie de Taylor, $\theta(t)$, centrada en 0 para el problema no lineal de valor inicial. Dé los valores exactos de todos los coeficientes.

c) Use los dos primeros términos de la serie de Taylor de la parte b) para aproximar t_1.

d) Use los tres primeros términos de la serie de Taylor en la parte b), aproxime t_1.

e) Con una calculadora que determine raíces (o un sistema algebraico de computación) y los primeros cuatro términos de la serie de Taylor en la parte b), aproxime, t_1.

Problema de programación en Mathematica

19. En la parte a) de este problema guiaremos al lector por los comandos, en Mathematica, *que le permitan aproximar la raíz t_1 de la ecuación $\theta(t) = 0$, donde $\theta(t)$ es la solución del* problema no lineal de valor inicial del problema 18. El procedimiento se modifica con facilidad para aproximar cualquier raíz de $e(t) = 0$. *(Si el lector no cuenta con Mathematica, adapte el procedimiento descrito con la sintaxis correspondiente al sistema algebraico que tenga a la mano.)*

a) Copie exactamente cada paso de programa (renglón) y a continuación ejecútelo en la siguiente secuencia de comandos

```
sol = NDSolve[{y''[t] + Sin[y[t]] == 0, y[0] == Pi/12, y'[0] == -1/3},
    y, {t, 0, 5}]//Flattensolution = y[t] /. sol
Clear[y]
y[t_] := Evaluate[solution]
y[t]
grl = Plot[y[t], {t, 0, 5}]
root = FindRoot[y[t] == 0, {t, 1}]
```

b) Modifique la sintaxis de la parte a) según sea necesario y halle las dos raíces positivas siguientes de $\theta(t) = 0$.

Ejercicios de repaso

Conteste los problemas 1 a 9 sin consultar el texto. Llene el espacio en blanco o responda "cierto" 0 'falso".

1. Si un contrapeso de 10 lb estira 2.5 ft un resorte, uno de 32 lb lo estirará _____ ft.

2. El periodo del movimiento armónico simple de un contrapeso de 8 lb, colgado de un resorte cuya constante es 6.25 lb/ft, es _____ segundos.

3. La ecuación diferencial de un contrapeso fijo en un resorte es $x'' + 16x = 0$. Si el peso se suelta cuando $t = 0$ desde 1 m arriba de la posición de equilibrio, con una velocidad de 3 m/s hacia abajo, la amplitud de las vibraciones es _____ metros.

4. La resonancia pura no se puede presentar cuando hay una fuerza de amortiguamiento. _____

5. Cuando hay amortiguamiento, los desplazamientosdeun contrapeso en un resorte siempre tienden a cero cuando $t \to \infty$. _____

6. Un contrapeso colgado de un resorte cuyo movimiento esté críticamente amortiguado, posiblemente pase dos veces por la posición de equilibrio. _____

7. Cuando el amortiguamiento es crítico, cualquier aumento en amortiguación dará un sistema _____

8. Si un movimiento armónico simple se puede representar por $x = (\sqrt{2}/2)\,\text{sen}(2t + \phi)$, el ángulo de fase, ϕ, es _____ cuando x(O) = $-\frac{1}{2}$ y $x'(0) = 1$.

9. Un contrapeso de 16 lb, colgado de un resorte presenta movimiento armónico simple. Si la frecuencia de las oscilaciones es $3/2\pi$ vibraciones por segundo, la constante del resorte es igual a _____

10. Un contrapeso de 12 lb estira 2 ft a un resorte. A continuación, se suelta el contrapeso desde 1 punto abajo de la posición de equilibrio a una velocidad de 4 ft/s hacia arriba.
    a) Deduzca la ecuación que describe al movimiento armónico simple originado.
    b) ¿Cuáles son la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento?
    c) ¿En qué momento el contrapeso regresa al punto de partida?
    d) ¿En qué momento el contrapeso pasa por la posición de equilibrio al ir hacia arriba? Responda la misma pregunta cuando va hacia abajo.
    e) ¿Cuál es la velocidad del contrapeso cuando $t = 3\pi/16$ s?
    f) ¿En qué momento la velocidad es cero?

11. Una fuerza de 2 lb estira 1 ft un resorte. Una masa cuyo peso es 8 lb se une al resorte. El sistema está sobre una mesa que le transmite una fuerza de fricción numéricamente igual a $\frac{3}{2}$ por la velocidad instantánea. Al empezar, el contrapeso está desplazado a 4 in arriba de la posición de equilibrio y parte del reposo. Deduzca la ecuación del movimiento, si éste tiene lugar en una recta horizontal que se toma como eje x.

12. Una pesa de 32 lb estira 6 in un resorte. La pesa se mueve en un medio que desarrolla una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a β veces la velocidad instantánea. Determine los valores de β para los cuales el sistema desarrolla movimiento oscilatorio.

13. Un resorte, cuya constante es $k = 2$, está suspendido en un líquido que presenta una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 4 veces la velocidad instantánea. Si se cuelga una masa m del resorte, determine los valores de m para los que el movimiento resultante es no oscilatorio.

14. El movimiento vertical de un contrapeso fijo a un resorte se describe con el problema de valor inicial

$$\frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0, \qquad x(0) = 4, \qquad x'(0) = 2.$$

Calcule el desplazamiento vertical máximo.

15. Una pesa de 4 lb estira 18 in un resorte. A este sistema se aplica una fuerza periódica igual a $f(t) = \cos \gamma t + \text{sen } \gamma t$, comenzando en $t = 0$. Sin una fuerza amortiguadora, ¿para qué valor de γ el sistema se encuentra en resonancia pura?

16. Determine una solución particular de $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = A$, donde A es una fuerza constante.

17. Una pesa de 4 lb cuelga de un resorte cuya constante es 3 lb/ft. Todo el sistema está sumergido en un liquido que presenta una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a la velocidad instantánea. A partir de $t = 0$, se aplica al sistema una fuerza externa igual a $f(t) = e^{-t}$. Deduzca la ecuación del movimiento si la pesa se suelta partiendo del reposo en un punto a 2 ft abajo de la posición de equilibrio.

18. a) Hay dos resortes en serie (Fig. 5.40). Sin tener en cuenta la masa de cada uno, demuestre que la constante efectiva de resorte k esta definida por $1/k = 1/k_1 + 1/k_2$.
    b) Un contrapeso de W lb estira $\frac{1}{2}$ ft un resorte y $\frac{1}{4}$ ft a otro. Ambos se fijan como en la figura 5.40 y se cuelga de ellos la pesa W. Suponga que el movimiento es libre y que no hay fuerza amortiguadora presente. Deduzca la ecuación del movimiento si la pesa parte de un punto a 1 ft abajo de la posición de equilibrio, con una velocidad de $\frac{2}{3}$ ft/s hacia abajo.
    c) Demuestre que la velocidad máxima del contrapeso es $\frac{2}{3}\sqrt{3g+1}$.

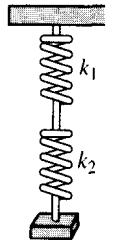


FIGURA 5.40

19. Un circuito en serie contiene una inductancia L = 1 h, una capacitancia C = 10^{-4} f y una fuerza electromotriz de E(t) = 100 sen 50t V. Al principio, la carga q y la corriente i son cero..
    a) Deduzca la ecuación que describe la carga en cualquier momento.
    b) Deduzca la ecuación que describe la corriente en cualquier momento.
    c) Calcule los momentos en que la carga del capacitor es cero.

20. Demuestre que la corriente $i(t)$ en un circuito en serie *LRC* satisface la ecuación diferencial

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = E'(t),$$

en que *E'(t)* representa la derivada de *E(t).*

21. Se tiene el problema de valor en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = y(2\pi), \qquad y'(0) = y'(2\pi).$$

Demuestre que, excepto cuando $\lambda = 0$, hay dos funciones propias que corresponden a cada valor propio.

CAPÍTULO

6

SOLUCIONES EN FORMA DE SERIES DE POTENCIAS DE ECUACIONES LINEALES

6.1 Repaso de las series de potencias; soluciones en forma de series de potencias
6.2 Soluciones en tomo a puntos ordinarios
6.3 Soluciones en tomo a puntos singulares
6.4 Dos ecuaciones especiales
Ejercicios de repaso

INTRODUCCIÓN

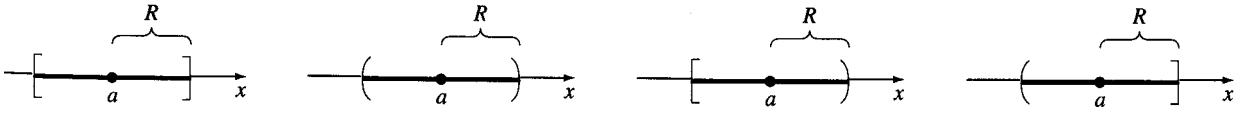
Hasta ahora hemos resuelto, principalmente, ecuaciones diferenciales lineales de orden dos o superior, cuando las ecuaciones tenían coeficientes constantes. La única excepción fue la ecuación de Cauchy-Euler. En las aplicaciones se observa que las ecuaciones lineales de orden superior con coeficientes variables tienen la misma importancia, si no es que más, que las de coeficientes constantes. Como mencionamos en la introducción a la sección 4.7, una ecuación lineal sencilla de segundo orden con coeficientes variables, como es $y'' + xy = 0$, no tiene soluciones elementales. Podemos encontrar dos soluciones linealmente independientes de esta ecuación pero, según veremos en las secciones 6.2 y 6.4, estas soluciones están representadas por series infinitas.

6.1 REPASO DE LAS SERIES DE POTENCIAS; SOLUCIONES EN FORMA DE SERIES DE POTENCIAS

- *Series de potencias* ■ *Radio de convergencia* ■ *Intervalo de convergencia*
- *Analiticidad de las soluciones en un punto* ■ *Aritmética de las series de potencias*
- *Solución en serie de potencias de una ecuación diferencial.*

Repaso de las series de potencias No obstante lo que describe la sección 4.7, la mayor parte de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables no se puede resolver en términos de funciones elementales. Una técnica normal para resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden superior con coeficientes variables, es tratar de encontrar una solución en forma de serie infinita. Con frecuencia se puede expresar la solución en forma de una serie de potencias; razón por la cual es adecuado citar una lista de algunas de sus propiedades más importantes. Para un repaso detallado del concepto de series infinitas, consúltese un libro de cálculo infinitesimal.

- **Definición de una serie de potencias** Una serie de potencias en $x - a$ es una serie infinita de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$. También, se dice que esa serie es una serie de potencias centrada en a; por ejemplo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} x^n$ es una serie de potencias en x centrada en cero.
- **Convergencia** Dado un valor de x, una serie de potencias es una serie de constantes. Si la serie equivale a una constante real finita para la x dada, se dice que la serie converge en x. Si no converge en x, se dice que diverge en x.
- **Intervalo de convergencia** Toda serie de potencias tiene un intervalo de convergencia, que es el conjunto de los números para los cuales converge la serie.
- **Radio de convergencia** Todo intervalo de convergencia posee un radio de convergencia, R. Para una serie de potencias de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$ sólo hay tres posibilidades:
  i) La serie sólo converge en su centro a. En este caso, $R = 0$.
  ii) La serie converge para toda x que satisfaga $|x - a| < R$, donde $R > 0$. La serie diverge para $|x - a| > R$.
  iii) La serie converge para toda x. En este caso, $R = \infty$.
- **Convergencia en un extremo** Recuérdese que la desigualdad de valor absoluto $|x - a| < R$ equivale a $-R < x - a < R$ o bien a $a - R < x < a + R$. Si una serie de potencias converge para $|x - a| < R$, donde $R > 0$, puede converger o no en los extremos del intervalo $a - R < x < a + R$. La figura 6.1 muestra cuatro intervalos de convergencia posibles.



[a − R, a + R]
La serie converge en ambos extremos

b) (a − R, a + R)
La serie diverge en ambos extremos.

c) [a − R, a + R)
La serie converge en a − R y diverge en a + R

d) (a − R, a + RI
La serie diverge en a − R y converge en a + R.

FIGURA 6.1

- **Convergencia absoluta** Dentro de su intervalo de convergencia, una serie de potencias converge absolutamente; en otras palabras, cuando x está en el intervalo de convergencia, la serie de valores absolutos $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||(x-a)^n|$ converge.
- **Determinación del intervalo de convergencia** Muchas veces se puede determinar la convergencia de una serie de potencias mediante el *criterio de Za razón*:*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| |x-a| = L.$$

La serie converge absolutamente para aquellos valores de x para los que $L < 1$. Con esta prueba vemos que el radio de convergencia es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \tag{1}$$

siempre y cuando exista el límite.

- **Una serie de potencias define a una función** Para una función dada se puede escribir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$$

cuyo dominio es el intervalo de convergencia de la serie. Si ésta tiene un radio de convergencia $R > 0$, f es continua, diferenciable e integrable en el intervalo $(a-R, a+R)$. Además, f '(x) e $\int f(x)\,dx$ se pueden determinar por derivación e integración término a término:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

$$\int f(x)\,dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}.$$

Aunque el radio de convergencia de ambas series es R, el intervalo de convergencia puede ser distinto de la serie original, ya que la convergencia en un extremo se puede perder por diferenciación, o ganar por integración.

- **Series que son idénticas a cero** Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = 0$, $R > 0$, para todo número real x en el intervalo de convergencia, entonces $c_n = 0$ para toda n.
- **Analiticidad en un punto** En cálculo infinitesimal se demuestra que funciones como e^x, $\cos x$ y $\ln(x-1)$ se pueden representar por medio de una serie de potencias desarrolladas en series de Maclaurin o de Taylor. Se dice que una función f es analítica en el punto a si se puede representar por una serie de potencias en $x-a$, con radio de convergencia positivo. La noción de analiticidad en un punto será de importancia en las secciones 6.2 y 6.3.
- **Aritmética de las series de potencias** Las series de potencias se pueden manipular mediante las operaciones de suma, multiplicación y división. Los procedimientos son parecidos al modo en que se suman, multiplican o dividen dos polinomios; esto es, se suman los coeficientes de las potencias iguales de x, se aplica la propiedad distributiva, se agrupan los términos semejantes y es válido llevar a cabo la división larga; por

*También llamado criterio del cociente.

ejemplo, si las series de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ convergen ambas cuando $|x| < R$, entonces

$$f(x) + g(x) = (c_0 + b_0) + (c_1 + b_1)x + (c_2 + b_2)x^2 + \cdots$$

$$f(x)g(x) = \text{cobo} + (c_0b_1 + c_1b_0)x + (c_0b_2 + c_1b_1 + c_2b_0)x^2 + \cdots.$$

EJEMPLO 1 **Intervalo de convergencia**

Determine el intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n n}$.

SOLUCIÓN La serie de potencias está centrada en 3. De acuerdo con (1), el radio de convergencia es

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n} = 2.$$

La serie converge absolutamente cuando $|x - 3| < 2$, o $1 < x < 5$. En el extremo izquierdo, $x = 1$, vemos que la serie de constantes $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n/n)$ es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alterna. En el extremo derecho, $x = 5$, la serie es la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$, que es divergente. Así, el intervalo de convergencia es $[1, 5)$. ■

EJEMPLO 2 **Multiplicación de dos series de potencias**

Encuentre los cuatro primeros términos de una serie de potencias en x para $e^x \cos x$.

SOLUCIÓN En el curso de cálculo se ve que las series de Maclaurin para e^x y $\cos x$ son, respectivamente,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots \quad \text{y} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots.$$

Al multiplicar y agrupar los términos semejantes se obtiene

$$\begin{aligned} e^x \cos x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots\right) \\ &= 1 + (1)x + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24}\right)x^4 + \cdots \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \cdots. \end{aligned}$$

■

En el ejemplo 2, el intervalo de convergencia de las series de Maclaurin de e^x y $\cos x$ es $(-\infty, \infty)$; en consecuencia, el intervalo de convergencia para $e^x \cos x$ expresado como serie de potencias también es $(-\infty, \infty)$.

EJEMPLO 3 **División entre una serie de potencias**

Halle los cuatro primeros términos de sec x como serie de potencias en x.

SOLUCIÓN Una opción es emplear la serie de Maclaurin para cos x citada en el ejemplo 2, para después usar la división larga. Como $\sec x = 1/\cos x$, entonces

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots \overline{)1}$$

$$\begin{array}{r} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \cdots \\ \hline 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots \\ \hline \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} - \cdots \\ \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{48} - \cdots \\ \hline \frac{5x^4}{24} - \frac{7x^6}{360} + \cdots \\ \frac{5x^4}{24} - \frac{5x^6}{48} + \cdots \\ \hline \frac{61x^6}{720} - \cdots \end{array}$$

Por consiguiente,
$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \cdots. \tag{2}$$

El intervalo de convergencia de esta serie es $(-\pi/2, \pi/2)$. (¿Por qué?) ■

Es evidente que los procedimientos aplicados en los ejemplos 2 y 3 son tediosos cuando se hacen a mano. Los problemas de este tipo se pueden resolver con un mínimo de esfuerzo mediante un paquete computacional con capacidades algebraicas, como Mathematica o Maple. En el primero, se puede evitar la división del ejemplo 3 por medio de la instrucción **Series[Sec[x],** {x, 0, S}]. Véanse los problemas ll a 14 de los ejercicios 6.1.

En lo que resta de esta sección y capítulo, es importante que el lector se adiestre en la simplificación de la suma de dos o más series de potencias, cada una expresada en notación de sumatoria (sigma) formando una expresión con una sola Σ. Para ello, a menudo se requiere un corrimiento de los índices de suma.

EJEMPLO 4 **Suma de dos series de potencias**

Exprese $\sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 6c_n x^{n+1}$ como una sola serie.

SOLUCIÓN Para sumar la serie se necesita que ambos índices de las sumatorias comiencen en el mismo número y que las potencias de x en cada serie estén "enfasadas"; esto es,

que si una serie comienza con un múltiplo de, digamos x a la primera potencia, la otra serie empiece con la misma potencia. Si escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 6c_n x^{n+1} = 2 \cdot 1 \cdot c_1 x^0 + \sum_{n=2}^{\infty} 2nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 6c_n x^{n+1}, \tag{3}$$

(la serie comienza con x para $n=2$; la serie comienza con x para $n=0$)

las dos series del lado izquierdo comienzan con x^1. Para obtener el mismo índice de suma nos basamos en los exponentes de x; se define $k = n - 1$ en la primera serie y $k = n + 1$ en la segunda. Así, el lado derecho de la ecuación (3) se transforma en

$$2c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2(k+1)c_{k+1}x^k + \sum_{k=1}^{\infty} 6c_{k-1}x^k. \tag{4}$$

Recuérdese que el índice de suma es una variable "muda". El hecho de que $k = n - 1$ en un caso y $k = n + 1$ en el otro no nos debe confundir si tenemos en mente que lo importante es el *valor* del índice de la sumatoria. En ambos casos k adopta los mismos valores sucesivos, $1, 2, 3, \ldots$ cuando $n = 2, 3, 4, \ldots$ (para $k = n - 1$) y $n = 0, 1, 2, \ldots$ (para $k = n + 1$).

Con lo anterior ya podemos sumar las series en (4) término a término:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 6c_n x^{n+1} = 2c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} [2(k+1)c_{k+1} + 6c_{k-1}]x^k. \tag{5}$$

Si el lector no se convenció, desarrolle algunos términos de ambos lados de (5). ■

Solución en forma de serie de potencias de una ecuación diferencial En la sección 1.1 establecimos que la función $y = e^{x^2}$ es una solución explícita de la ecuación, diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0. \tag{6}$$

Si reemplazamos x con x^2 en la serie de Maclaurin para e^x, podemos escribir la solución de (6) en la forma $y = \Sigma_{n=0}^{\infty} (x^{2n}/n!)$. Esta serie converge para todos los valores reales de x. En otras palabras, cuando se conoce la solución por adelantado, es posible hallar una solución en forma de una serie para la ecuación diferencial.

A continuación nos proponemos obtener una **solución en forma de serie de potencias** de la ecuación (6) en forma directa; el método de ataque se parece a la técnica de los coeficientes indeterminados.

EJEMPLO 5 **Empleo de una serie de potencias para resolver una ecuación diferencial**

Determine una solución de $\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$ como una serie de potencias en x.

SOLUCIÓN Si suponemos que la solución de la ecuación dada existe y tiene la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{7}$$

nos preguntaremos: ¿se pueden calcular los coeficientes, c_n, para los cuales la serie de potencias converge hacia una función que satisfaga a (6)? Una derivación formal* término a término de la ecuación (7) da como resultado

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}.$$

Obsérvese que, dado que el primer término de la primera serie (que corresponde a $n = 0$) es cero, la suma comienza con $n = 1$. Con la ecuación anterior y la solución propuesta (7) se llega a

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+1}. \tag{8}$$

Si queremos sumar las dos series en (8) escribimos

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 1 \cdot c_1 x^0 + \sum_{n=2}^{\infty} nc_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+1} \tag{9}$$

y procedemos igual que en el ejemplo 4, con $k = n - 1$ en la primera serie y $k = n + 1$ en la segunda. El lado derecho de (9) se transforma en

$$c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k + 1)c_{k+1} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2c_{k-1} x^k.$$

Después de sumar término a término las series, se sigue que

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+1)c_{k+1} - 2c_{k-1}]x^k = 0. \tag{10}$$

Por lo tanto, para que (10) sea idéntica a 0 es necesario que los coeficientes de las potencias iguales de x sean cero; esto es, que

$$c_1 = 0 \quad \text{y} \quad (k + 1)c_{k+1} - 2c_{k-1} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{11}$$

La ecuación (ll) **es** una **relación de recurrencia o relación recursiva** que determina las c_k. Dado que $k + 1 \neq 0$ para todos los valores indicados de k, se puede expresar (ll) en la forma

$$c_{k+1} = \frac{2c_{k-1}}{k + 1}, \tag{12}$$

Por iteración, esta fórmula genera los siguientes resultados:

$$k = 1, \qquad c_2 = \frac{2}{2} c_0 = c_0$$

*Hasta ahora no conocemos el intervalo de convergencia.

$$k = 2, \qquad c_3 = \frac{2}{3}c_1 = 0$$

$$k = 3, \qquad c_4 = \frac{2}{4}c_2 = \frac{1}{2}c_0 = \frac{1}{2!}c_0$$

$$k = 4, \qquad c_5 = \frac{2}{5}c_3 = 0$$

$$k = 5, \qquad c_6 = \frac{2}{6}c_4 = \frac{1}{3 \cdot 2!}c_0 = \frac{1}{3!}c_0$$

$$k = 6, \qquad c_7 = \frac{2}{7}c_5 = 0$$

$$k = 7, \qquad c_8 = \frac{2}{8}c_6 = \frac{1}{4 \cdot 3!}c_0 = \frac{1}{4!}c_0$$

y así sucesivamente; por lo tanto, a partir de la hipótesis original, ecuación (7), llegamos a

$$\begin{aligned} y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 + \cdots \\ &= c_0 + 0 + c_0 x^2 + 0 + \frac{1}{2!}c_0 x^4 + 0 + \frac{1}{3!}c_0 x^6 + 0 + \cdots \\ &= c_0 \left[1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \cdots \right] = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}. \end{aligned} \tag{13}$$

En vista de que la iteración de (12) dejó a c_0 totalmente indeterminado, hemos hallado la solución general de (6). ■

La ecuación diferencial del ejemplo 5, al igual que la del siguiente, se puede resolver con facilidad con métodos ya conocidos. Estos dos ejemplos sirven de antecedentes de las técnicas que describiremos en las secciones 6.2 y 6.3.

EJEMPLO 6 **Empleo de una serie de potencias para resolver una ecuación diferencial**

Determine en forma de serie de potencias en x las soluciones de $4y'' + y = 0$.

SOLUCIÓN Si $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, ya se vio que $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$, y de ello se desprende que

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}.$$

Al sustituir las expresiones dey" y dey en la ecuación diferencial, se tiene:

$$4y'' + y = \sum_{n=2}^{\infty} 4n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

ambas series comienzan con x^0

Con la sustitución $k = n - 2$ en la primera serie y $k = n$ en la segunda (después de usar $n = k + 2$ y $n = k$) obtenemos:

$$4y'' + y = \sum_{k=0}^{\infty} 4(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} [4(k+2)(k+1)c_{k+2} + c_k]x^k = 0.$$

De acuerdo con esta última identidad, vemos que cuando $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$4(k+2)(k+1)c_{k+2} + c_k = 0 \quad \text{o sea} \quad c_{k+2} = \frac{-c_k}{4(k+2)(k+1)}.$$

La última fórmula es de tipo iterativo y da

$$c_2 = \frac{-c_0}{4 \cdot 2 \cdot 1} = -\frac{c_0}{2^2 \cdot 2!}$$
$$c_3 = \frac{-c_1}{4 \cdot 3 \cdot 2} = -\frac{c_1}{2^2 \cdot 3!}$$
$$c_4 = \frac{-c_2}{4 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{c_0}{2^4 \cdot 4!}$$
$$c_5 = \frac{-c_3}{4 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{c_1}{2^4 \cdot 5!}$$
$$c_6 = \frac{-c_4}{4 \cdot 6 \cdot 5} = -\frac{c_0}{2^6 \cdot 6!}$$
$$c_7 = \frac{-c_5}{4 \cdot 7 \cdot 6} = -\frac{c_1}{2^6 \cdot 7!}$$

etc. Con esta iteración c_0 y c_1 son arbitrarios. Según la hipótesis original,

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + c_7x^7 + \cdots$$
$$= c_0 + c_1x - \frac{c_0}{2^2 \cdot 2!}x^2 - \frac{c_1}{2^2 \cdot 3!}x^3 + \frac{c_0}{2^4 \cdot 4!}x^4 + \frac{c_1}{2^4 \cdot 5!}x^5 - \frac{c_0}{2^6 \cdot 6!}x^6 - \frac{c_1}{2^6 \cdot 7!}x^7 + \cdots$$

o

$$y = c_0\left[1 - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{1}{2^4 \cdot 4!}x^4 - \frac{1}{2^6 \cdot 6!}x^6 + \cdots\right]$$
$$+ c_1\left[x - \frac{1}{2^2 \cdot 3!}x^3 + \frac{1}{2^4 \cdot 5!}x^5 - \frac{1}{2^6 \cdot 7!}x^7 + \cdots\right]$$

es una solución general. Cuando la serie se expresa en notación de sumatoria,

$$y_1(x) = c_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad \text{Y} \quad y_2(x) = 2c_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1},$$

se puede aplicar el criterio de la razón para demostrar que ambas Series convergen para toda x. El lector también puede reconocer que la solución está formada por las series de Maclaurin para $y_1(x) = c_0 \cos(x/2)$ y $y_2(x) = 2c_1 \operatorname{sen}(x/2)$. ■

EJERCICIOS 6.1

Determine el intervalo de convergencia de cada serie de potencias en los problemas 1 a 10.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} x^k$

4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!} x^k$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^3}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{\sqrt{n}}$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{10^k} (x-5)^k$

8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+2)^2} (x-4)^k$

9. $\sum_{k=0}^{\infty} k! 2^k x^k$

10. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{k^{2k}} x^k$

En los problemas ll a 14 calcule los cuatro primeros términos de la serie de potencias en x para la función dada.* Haga los cálculos a mano o con un paquete computacional con capacidades algebraicas.

ll. $e^x \operatorname{sen} x$

12. $e^{-x} \cos x$

13. $\operatorname{sen} x \cos x$

14. $e^x \ln(1 - x)$

En los problemas 15 a 24 resuelva la ecuación diferencial respectiva como en los capítulos anteriores, y compare los resultados con las soluciones obtenidas suponiendo una serie de potencias $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

15. $y' + y = 0$

16. $y' = 2y$

17. $y' - x^2 y = 0$

18. $y' + x^3 y = 0$

19. $(1 - x)y' - y = 0$

20. $(1 + x)y' - 2y = 0$

21. $y'' + y = 0$

22. $y'' - y = 0$

23. $y'' = y'$

24. $2y'' + y' = 0$

25. La función $y = J_0(x)$ está definida por la serie de potencias

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

que converge para toda x. Demuestre que $J_0(x)$ es una solución particular de la ecuación diferencial $xy'' + y' + xy = 0$.

*Suponga que la serie se centra en $a = 0$.

Problema para discusión

26. Suponga que la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-4)^k$ converge en -2 y diverge en 13. Investigue si la serie converge en 10, 7, -7 y ll. Las respuestas posibles son sí, *no y podría.*

6.2 SOLUCIONES EN TORNO A PUNTOS ORDINARIOS

- *Puntos ordinarios de una ecuación diferencial* ■ *Puntos singulares de una ecuación diferencial*
- *Existencia de una solución en forma de serie de potencias en torno a un punto ordinario*
- *Determinación de una solución en forma de serie de potencias*

Supongamos que la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{1}$$

se expresa en la forma reducida

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{2}$$

dividiéndola entre el primer coeficiente, $a_2(x)$. Damos la siguiente definición:

DEFINICIÓN 6.1 Puntos ordinarios y puntos singulares

Se dice que un punto x_0 es *punto ordinario* de la ecuación diferencial (1) si $P(x)$ y $Q(x)$ son analíticas en x_0. Se dice que un punto que no es ordinario es un *punto singular* de la ecuación.

EJEMPLO 1 Puntos ordinarios

Todo valor finito de x es un punto ordinario de $y'' + (e^x)y' + (\text{sen } x)y = 0$. En particular vemos que $x = 0$ es un punto ordinario porque e^x y sen x son analfticas en este punto; o sea, ambas funciones se pueden representar en forma de series de potencias centradas en 0. Recuérdese que, según el cálculo infinitesimal,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots \qquad \text{y} \qquad \text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

convergen para todos los valores finitos de x. ■

EJEMPLO 2 Puntos ordinarios y puntos singulares

a) La ecuación diferencial $xy'' + (\text{sen } x)y = 0$ tiene un punto ordinario en $x = 0$, puesto que Q(x) = (sen x)/x se puede desarrollar en la serie de potencias

$$Q(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

que converge para todos los valores finitos de x.

b) La ecuación diferencial $y'' + (\ln x)y = 0$ tiene un punto singular en $x = 0$ porque $Q(x) = \ln x$ no se puede desarrollar como serie de potencias en x centrada en ese punto. ■

Coeficientes polinomiales Nos ocuparemos principalmente del caso en que la ecuación (1) tiene ***coeficientespolinomiales.*** Como consecuencia de la definición 6.1, cuando $a_2(x)$, $a_1(x)$ y $a_0(x)$ son polinomios ***sin factores comunes, un*** punto $x = x_0$ es

i) Un punto ordinario si $a_2(x_0) \neq 0$ o bien
ii) Un punto singular si $a_2(x_0) = 0$.

EJEMPLO 3 Puntos singulares y puntos ordinarios

a) Los puntos singulares de la ecuación $(x^2 - 1)y'' + 2xy' + 6y = 0$ son las soluciones de $x^2 - 1 = 0$; o sea, $x = \pm 1$. Todos los demás valores finitos de x son puntos ordinarios.

b) Los puntos singulares no necesitan ser números reales. La ecuación $(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$ tiene puntos singulares en las soluciones de $x^2 + 1 = 0$, que son $x = \pm i$. Todos los demás valores finitos de x, sean reales o complejos, son puntos ordinarios.

c) La ecuación de Cauchy-Euler, $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$, donde a, b y c son constantes, tiene un punto singular en $x = 0$. Todos los demás valores finitos de x, sean reales o complejos, son puntos ordinarios. ■

Para nuestros fines, los puntos ordinarios y los puntos singulares siempre serán finitos. Es posible que una ecuación diferencial tenga, por ejemplo, un punto singular en el infinito. (Véanse las observaciones en la página 277.)

Enunciaremos, sin demostrarlo, el siguiente teorema sobre la existencia de soluciones en forma de series de potencias.

TEOREMA 6.1 **Existencia de las soluciones en forma de series de potencias**

Si $x = x_0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial (2), siempre se pueden determinar dos soluciones linealmente independientes en forma de series de potencias centradas en x_0:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n. \tag{3}$$

Una solución en forma de serie converge, cuando menos, para $|x - x_0| < R$, donde R es la distancia de x_0 al punto singular (real o complejo) más próximo.

Se dice que una solución de una ecuación diferencial en la forma de (3) es una solución ***en torno*** al punto ordinario x_0. La distancia R que menciona el teorema 6.1 es el valor mínimo del radio de convergencia. Una ecuación diferencial puede tener un punto singular finito y sin embargo una solución puede ser válida para toda x; por ejemplo, la ecuación diferencial puede tener una solución polinomial.

Para resolver una ecuación lineal de segundo orden, como la ecuación (1), se calculan dos conjuntos de coeficientes c_n, tales que se construyan dos series de potencias distintas, $y_1(x)$ y

$y_2(x)$, desarrolladas ambas en tomo al mismo punto ordinario x_0. El procedimiento que usamos para resolver una ecuación de segundo orden es el mismo que el del'ejemplo 6, sección 6.1; esto es, se supone una solución $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ y se procede a determinar las c_n. La solución general de la ecuación diferencial es $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$. De hecho, se puede demostrar que $C_1 = c_0$ y $C_2 = c_1$, donde c_0 y c_1 son arbitrarias.

Nota

Para simplificar, supondremos que un punto ordinario está localizado en $x = 0$ en caso de que no lo estuviera, siempre es posible usar la sustitución $t = x - x_0$ para trasladar el valor x = x_0 a $t = 0$.

EJEMPLO 4 **Solución en forma de serie de potencias en torno a un punto ordinario**

Resuelva y" + xy = 0.

SOLUCIÓN x = 0 es un punto ordinario de la ecuación. Puesto que no hay puntos singulares finitos, el teorema 6.1 garantiza que hay dos soluciones en forma de series de potencias centradas en 0, convergentes para $|x| < \infty$. Al sustituir,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad y \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

en la ecuación diferencial, se obtiene

$$y'' + xy = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$$

$$= 2 \cdot 1c_2x^0 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}.$$

ambas series comienzan con x

En la primera serie $k = n - 2$, y en la segunda $k = n + 1$:

$$y'' + xy = 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k$$

$$= 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+2)(k+1)c_{k+2} + c_{k-1}]x^k = 0.$$

Se debe cumplir que $2c_2 = 0$, lo cual obliga a $c_2 = 0$ y

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} + c_{k-1} = 0.$$

La última expresión equivale a

$$c_{k+2} = -\frac{c_{k-1}}{(k+2)(k+1)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

La iteración da lugar a $c_3 = -\frac{c_0}{3 \cdot 2}$

$$c_4 = -\frac{c_1}{4 \cdot 3}$$

$$c_5 = -\frac{c_2}{5 \cdot 4} = 0$$

$$c_6 = -\frac{c_3}{6 \cdot 5} = \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} c_0$$

$$c_7 = -\frac{c_4}{7 \cdot 6} = \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} c_1$$

$$c_8 = -\frac{c_5}{8 \cdot 7} = 0$$

$$c_9 = -\frac{c_6}{9 \cdot 8} = -\frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} c_0$$

$$c_{10} = -\frac{c_7}{10 \cdot 9} = -\frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} c_1$$

$$c_{11} = -\frac{c_8}{11 \cdot 10} = 0$$

etc. Se ve que c_0 y c_1 son arbitrarias. Entonces

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 + c_7 x^7 + c_8 x^8 \\ &\quad + c_9 x^9 + c_{10} x^{10} + c_{11} x^{11} + \cdots \\ &= c_0 + c_1 x + 0 - \frac{1}{3 \cdot 2} c_0 x^3 - \frac{1}{4 \cdot 3} c_1 x^4 + 0 + \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} c_0 x^6 \\ &\quad + \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} c_1 x^7 + 0 - \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} c_0 x^9 - \frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} c_1 x^{10} + 0 + \cdots \\ &= c_0 \left[1 - \frac{1}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} x^6 - \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} x^9 + \cdots \right] \\ &\quad + c_1 \left[x - \frac{1}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} x^7 - \frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} x^{10} + \cdots \right]. \end{aligned}$$

■

Aunque está clara la tendencia o pauta de los coeficientes en el ejemplo 4, a veces es útil expresar las soluciones en notación sigma (sumatoria). Al aplicar las propiedades del factorial se puede escribir

$$y_1(x) = c_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k [1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)]}{(3k)!} x^{3k} \right]$$

Y

$$y_2(x) = c_1 \left[x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k [2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)]}{(3k+1)!} x^{3k+1} \right]$$

De este modo se puede emplear el criterio de la razón para demostrar que cada serie converge cuando $|x| < \infty$.

La ecuación diferencial del ejemplo 4 se llama **ecuación de Airy** y aparece al estudiar la difracción de la luz, la difracción de las ondas de radio en torno a la superficie de la Tierra, en aerodinámica y en el pandeo de una columna vertical uniforme que se flexiona bajo su propio peso. Hay otras formas comunes de esta ecuación, que son $y'' - xy = 0$ y $y'' + \alpha^2 xy = 0$. (Véase el problema 43, en los ejercicios 6.2, con una aplicación de esta ecuación.)

EJEMPLO 5 **Solución en forma de serie de potencias en torno a un punto ordinario**

Resuelva $(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$.

SOLUCIÓN En virtud de que los puntos singulares son $x = \pm i$, una solución en forma de serie de potencias converge, cuando menos, en $|x| < 1$.* La hipótesis $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ nos conduce a

$$(x^2 + 1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= 2c_2 x^0 - c_0 x^0 + 6c_3 x + c_1 x - c_1 x + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n}_{k=n}$$

$$+ \underbrace{\sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}}_{k=n-2} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} nc_n x^n}_{k=n} - \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n}_{k=n}$$

$$= 2c_2 - c_0 + 6c_3 x + \sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2} + kc_k - c_k]x^k$$

$$= 2c_2 - c_0 + 6c_3 x + \sum_{k=2}^{\infty} [(k+1)(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2}]x^k = 0.$$

Por consiguiente,

$$2c_2 - c_0 = 0,\ c_3 = 0$$

$$(k+1)(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2} = 0$$

0

$$c_2 = \frac{1}{2}c_0, \qquad c_3 = 0$$

$$c_{k+2} = \frac{1-k}{k+2}c_k, \quad k = 2, 3, 4, \ldots.$$

Al iterar la última fórmula obtenemos

$$c_4 = -\frac{1}{4}c_2 = -\frac{1}{2 \cdot 4}c_0 = -\frac{1}{2^2 2!}c_0$$

*El **módulo** o magnitud del número complejo $x = i$ es $|x| = 1$. Si $x = a + bi$ es un punto singular, entonces $|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$c_5 = -\frac{2}{5}c_3 = 0$$

$$c_6 = -\frac{3}{6}c_4 = \frac{3}{2\cdot 4\cdot 6}c_0 = \frac{1\cdot 3}{2^3 3!}c_0$$

$$c_7 = -\frac{4}{7}c_5 = 0$$

$$c_8 = -\frac{5}{8}c_6 = -\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}c_0 = -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4 4!}c_0$$

$$c_9 = -\frac{6}{9}c_7 = 0$$

$$c_{10} = -\frac{7}{10}c_8 = \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}c_0 = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^5 5!}c_0$$

etc. Por lo tanto

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + c_7x^7 + c_8x^8 + \cdots$$
$$= c_1x + c_0\left[1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2^2 2!}x^4 + \frac{1\cdot 3}{2^3 3!}x^6 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4 4!}x^8 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^5 5!}x^{10} - \cdots\right]$$

Las soluciones son el polinomio $y_2(x) = c_1x$ y la serie

$$y_1(x) = c_0\left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^{2n}\right], \quad |x| < 1. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 6 **Relación de recurrencia de tres términos**

Si se propone una solución de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ para la ecuación

$$y'' - (1 + x)y = 0,$$

se obtienen $c_2 = c_0/2$ y la relación de recurrencia de tres términos

$$c_{k+2} = \frac{c_k + c_{k-1}}{(k+1)(k+2)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Para simplificar la iteración podemos escoger, primero, $c_0 \neq 0$ y $c_1 = 0$; con esto llegamos a una solución. La otra solución se obtiene al escoger después $c_0 = 0$ y $c_1 \neq 0$. Con la primera elección de constantes obtenemos

$$c_2 = \frac{1}{2}c_0$$

$$c_3 = \frac{c_1 + c_0}{2\cdot 3} = \frac{c_0}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}c_0$$

$$c_4 = \frac{c_2 + c_1}{3\cdot 4} = \frac{c_0}{2\cdot 3\cdot 4} = \frac{1}{24}c_0$$

$$c_5 = \frac{c_3 + c_2}{4 \cdot 5} = \frac{c_0}{4 \cdot 5}\left[\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{12}\right] = \frac{1}{30}c_0$$

etc. Por lo tanto, una solución es

$$y_1(x) = c_0\left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \cdots\right].$$

De igual modo, si escogemos $c_0 = 0$, entonces

$$c_2 = 0$$
$$c_3 = \frac{c_1 + c_0}{2 \cdot 3} = \frac{c_1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}c_1$$
$$c_4 = \frac{c_2 + c_1}{3 \cdot 4} = \frac{c_1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}c_1$$
$$c_5 = \frac{c_3 + c_2}{4 \cdot 5} = \frac{c_1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{120}c_1$$

y así sucesivamente. En consecuencia, otra solución es

$$y_2(x) = c_1\left[x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots\right].$$

Cada serie converge para todos los valores finitos de x. ■

Coeficientes no polinomiales En el ejemplo que sigue veremos cómo determinar una solución en forma de serie de potencias en torno a un punto ordinario de una ecuación diferencial, cuando sus coeficientes no son polinomios. También presentaremos una aplicación de la multiplicación de dos series de potencias, que describimos en la sección 6.1.

EJEMPLO 7 **Ecuación diferencial con coeficientes no polinomiales**

Resuelva $y'' + (\cos x)y = 0$.

SOLUCIÓN Ya que $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$, es claro que $x = 0$ es un punto ordinario.

Entonces, la solución propuesta $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ da

$$\begin{aligned} y'' + (\cos x)y &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= (2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \cdots) \\ &\quad + \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots\right)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots) \\ &= 2c_2 + c_0 + (6c_3 + c_1)x + \left(12c_4 + c_2 - \frac{1}{2}c_0\right)x^2 + \left(20c_5 + c_3 - \frac{1}{2}c_1\right)x^3 + \cdots \end{aligned}$$

La expresión correspondiente al último renglón tiene que ser idéntica a cero, de modo que se debe cumplir que

$$2c_2 + c_0 = 0, \qquad 6c_3 + c_1 = 0, \qquad 12c_4 + c_2 - \frac{1}{2}c_0 = 0, \qquad 20c_5 + c_3 - \frac{1}{2}c_1 = 0,$$

etc. Puesto que c_0 y c_1 son arbitrarias,

$$y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \cdots\right] \quad \text{y} \quad y_2(x) = c_1\left[x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{30}x^5 - \cdots\right]$$

La ecuación diferencial no tiene puntos singulares y, por consiguiente, ambas series convergen para todos los valores finitos de x. ■

EJERCICIOS 6.2

En los problemas 1 a 14 determine dos soluciones linealmente independientes en forma de series de potencias de cada ecuación diferencial en torno al punto ordinario x = 0.

1. $y'' - xy = 0$
2. $y'' + x^2y = 0$
3. $y'' - 2xy' + y = 0$
4. $y'' - xy' + 2y = 0$
5. $y'' + x^2y' + xy = 0$
6. $y'' + 2xy' + 2y = 0$
7. $(x - 1)y'' + y' = 0$
8. $(x + 2)y'' + xy' - y = 0$
9. $(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$
10. $(x^2 + 1)y'' - 6y = 0$
11. $(x^2 + 2)y'' + 3xy' - y = 0$
12. $(x^2 - 1)y'' + xy' - y = 0$
13. $y'' - (x + 1)y' - y = 0$
14. $y'' - xy' - (x + 2)y = 0$

En los problemas 15 a 18 aplique el método de las series de potencias para resolver la ecuación diferencial respectiva, sujeta a las condiciones iniciales indicadas.

15. $(x - 1)y'' - xy' + y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 6$
16. $(x + 1)y'' - (2 - x)y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
17. $y'' - 2xy' + 8y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$
18. $(x^2 + 1)y'' + 2xy' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

En los problemas 19 a 22 aplique el procedimiento del ejemplo 7 para determinar dos soluciones en forma de series de potencias en torno al punto ordinario x = 0 de la ecuación diferencial respectiva.

19. $y'' + (\text{sen } x)y = 0$
20. $xy'' + (\text{sen } x)y = 0$ [Sugerencia: vea el ejemplo 2.]
21. $y'' + e^{-x}y = 0$
22. $y'' + e^xy' - y = 0$

En los problemas 23 y 24 aplique el método de las series de potencias para resolver la ecuación no homogénea respectiva.

23. $y'' - xy = 1$
24. $y'' - 4xy' - 4y = e^x$

6.3 SOLUCIONES EN TORNO A PUNTOS SINGULARES

- *Puntos singulares regulares de una ecuación diferencial*
- *Puntos singulares irregulares de una ecuación diferencial*
- *Existencia de una solución en forma de serie alrededor de un punto singular*
- *Método de Frobenius* ■ *La ecuación de indices o indicativa*
- *Raíces de la ecuación indicativa o de indices*

En la sección anterior explicamos que no hay problema de tipo fundamental para determinar dos soluciones linealmente independientes y en forma de series de potencias de

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{1}$$

en torno a un punto ordinario $x = x_0$; sin embargo, cuando $x = x_0$ es un punto singular, no siempre es posible llegar a una solución de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$; sucede entonces que *podríamos* llegar a una solución en serie de potencias de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^{n+r}$, donde r es una constante que se debe determinar. Si r no es un entero no negativo, la última serie no es una serie de potencias.

Puntos singulares regulares y puntos singulares irregulares Los puntos singulares se subdividen en regulares e irregulares. Para definirlos, ponemos la ecuación (1) en su forma reducida

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \tag{2}$$

DEFINICIÓN 6.2 Puntos singulares, regulares o irregulares

Un punto singular, $x = x_0$, de la ecuación (1) es un **punto singular regular** si tanto $(x - x_0)P(x)$ como $(x - x_0)^2Q(x)$ son analíticas en x_0. Se dice que un punto singular que no es regular es un **punto singular irregular** de la ecuación.

Coeficientes polinomiales Cuando los coeficientes de la ecuación (1) son polinomios sin factores comunes, la definición 6.2 equivale a la siguiente:

Sea $a_2(x_0) = 0$. ***Fórmense*** $P(x)$ ***y*** $Q(x)$ ***reduciendo*** $a_1(x)/a_2(x)$ ***y*** $a_0(x)/a_2(x)$ ***a sus términos más simples, respectivamente. Si el factor*** $(x - x_0)$ ***está, cuando mucho, elevado a la primera potencia en el denominador de*** $P(x)$, ***y cuando más a la segunda potencia en el denominador de*** $Q(x)$, ***entonces*** $x = x_0$ ***es un punto singular regular.***

EJEMPLO 1 Clasificación de los puntos singulares

Debe ser obvio que $x = -2$ y $x = 2$ son puntos singulares de la ecuación

$$(x^2 - 4)^2y'' + (x - 2)y' + y = 0.$$

Al dividir la ecuación entre $(x^2 - 4)^2 = (x - 2)^2 (x + 2)^2$, hallamos

$$P(x) = \frac{1}{(x-2)(x+2)^2} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{1}{(x-2)^2(x+2)^2}.$$

Ahora investigaremos P(x) y Q(x) en cada punto singular.

Para que $x = -2$ sea un punto singular regular, el factor x + 2 puede aparecer elevado, cuando mucho, a la primera potencia en el denominador de P(x) y, también cuando más, a la segunda potencia en el denominador de Q(x). Al examinar P(x) y Q(x) se advierte que no se cumple la primera condición y, por consiguiente, x = -2 es un punto singular irregular,

Para que $x = 2$ sea un punto singular regular, el factor x - 2 puede aparecer elevado, cuando más, a la primera potencia en el denominador de $P(x)$ y, también cuando mucho, a la segunda potencia en el denominador de Q(x). Al examinar P(x) y $Q(x)$ se comprueba que se cumplen ambas condiciones, de modo que $x = 2$ es un punto singular regular. ■

EJEMPLO 2 **Clasificación de puntas singulares**

x = 0 y $x = -1$ son puntos singulares de la ecuación diferencial

$$x^2(x+1)^2y'' + (x^2 - 1)y' + 2y = 0.$$

Al examinar

$$P(x) = \frac{x-1}{x^2(x+1)} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{2}{x^2(x+1)^2}$$

se ve que x = 0 es un punto singular irregular porque (x - 0) aparece elevado al cuadrado en el denominador de P(x). Pero obsérvese que $x = -1$ es un punto singular regular.. ■

EJEMPLO 3 **Clasificación de puntas singulares**

a) x = 1 y $x = -1$ son puntos singulares regulares de

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 3oy = 0.$$

b) $x = 0$ es un punto singular irregular de $x^3y'' - 2xy' + 5y = 0$ porque

$$P(x) = -\frac{2}{x^2} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{5}{x^3}.$$

c) $x = 0$ es un punto singular regular de $xy'' - 2xy' + 5y = 0$, puesto que

$$P(x) = -2 \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{5}{x}.$$

■

Obsérvese que, en la parte c) del ejemplo 3 $(x - 0)$ y $(x - 0)^2$ ni siquiera aparecen en los denominadores de P(x) y Q(x), respectivamente. Recuérdese que esos factores pueden aparecer, cuando mucho, en esa forma. Para un punto singular $x = x_0$, toda potencia no negativa de $(x - x_0)$ menor de uno (es decir, cero) y toda potencia no negativa menor de dos (es decir, cero o uno) en los denominadores de P(x) y Q(x), respectivamente, implican que x_0 es un punto singular regular.

También debemos recordar que los puntos singulares pueden ser números complejos. Así, $x = 3i$ y $x = -3i$ son puntos singulares regulares de la ecuación $(x^2 + 9)y'' - 3xy' + (1 - x)y = 0$ porque

$$P(x) = \frac{-3x}{(x - 3i)(x + 3i)} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{1 - x}{(x - 3i)(x + 3i)}.$$

EJEMPLO 4 **Ecuación de Cauchy-Euler**

De acuerdo con lo que explicamos sobre la ecuación de Cauchy-Euler en la sección 4.7, podemos demostrar que $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^2 \ln x$ son soluciones de la ecuación $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ en el intervalo $(0, \infty)$. Si intentáramos el procedimiento del teorema 6.1 en torno al punto singular regular $x = 0$ (esto es, una solución supuesta en la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$), sólo podríamos obtener la solución $y_1 = x^2$. El hecho de no poder obtener la segunda solución no es de sorprender, porque $\ln x$ no posee un desarrollo en forma de serie de Taylor en torno a $x = 0$; por lo tanto, es imposible expresar $y_2 = x^2 \ln x$ como serie de potencias en x. ■

EJEMPLO 5 **Una ecuación diferencial sin solución en forma de serie de potencias***

La ecuación diferencial $6x^2y'' + 5xy' + (x^2 - 1)y = 0$ tiene un punto singular regular en $x = 0$, pero no tiene solución alguna que esté en forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Pero de acuerdo con el procedimiento que describiremos a continuación, se puede demostrar que existen dos soluciones en serie de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1/2} \quad \text{y} \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-1/3}.$$ ■

Método de Frobenius Para resolver una ecuación diferencial como la (1) en torno a un punto singular regular, se aplica el siguiente teorema, debido a Georg Ferdinand Frobenius.

TEOREMA 6.2 **Teorema de Frobenius**

Si $x = x_0$ es un punto singular regular de la ecuación (1), existe al menos una solución en serie de la forma:

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}, \tag{3}$$

en donde el número r es una constante por determinar. Esta serie converge cuando menos en algún intervalo $0 < x - x_0 < R$.

N. del R. T.: Las series introducidas en el ejemplo 5 suelen llamarse series de potencias *fraccionarias* y las ordinarias, series de potencias enteras.

Nótense las palabras al ***menos*** al principio del teorema 6.2. Significan que, a diferencia del teorema 6.1, éste ***no*** garantiza que haya dos soluciones de la forma indicada. El **método de Frobenius** consiste en identificar un punto singular regular, x_0, sustituir $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^{n+r}$ en la ecuación diferencial y determinar el exponente r desconocido y los coeficientes c_n.

Al igual que en la sección anterior para simplificar siempre supondremos, sin pérdida de generalidad, que $x_0 = 0$.

EJEMPLO 6 **Solución en serie en torno a un punto singular regular**

Como $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial

$$3xy'' + y' - y = 0, \tag{4}$$

Propondremos una solución del tipo $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$. Vemos que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)c_n x^{n+r-1} \quad \text{y} \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1)c_n x^{n+r-2}$$

de modo que

$$\begin{aligned} 3xy'' + y' - y &= 3\sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(3n + 3r - 2)c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\ &= x^r \left[r(3r - 2)c_0 x^{-1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (n + r)(3n + 3r - 2)c_n x^{n-1}}_{k = n - 1} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}_{k = n} \right] \\ &= x^r \left[r(3r - 2)c_0 x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [(k + r + 1)(3k + 3r + 1)c_{k+1} - c_k]x^k \right] = 0, \end{aligned}$$

y por lo anterior

$$r(3r - 2)c_0 = 0$$

$$(k + r + 1)(3k + 3r + 1)c_{k+1} - c_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Como no ganamos nada al escoger $c_0 = 0$, se debe cumplir que

$$r(3r - 2) = 0 \tag{6}$$

Y

$$c_{k+1} = \frac{c_k}{(k + r + 1)(3k + 3r + 1)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Los dos valores de r que satisfacen la ecuación (6) son $r_1 = \frac{2}{3}$ y $r_2 = 0$ y, al sustituirlos en la ecuación (7), dan lugar a dos relaciones de recurrencia distintas:

$$r_1 = \tfrac{2}{3}: \qquad c_{k+1} = -\frac{c_k}{(3k + 5)(k + 1)}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots; \tag{8}$$

$$r_2 = 0: \qquad c_{k+1} = \frac{c_k}{(k+1)(3k+1)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Al iterar (8) obtenemos

$$c_1 = \frac{c_0}{5 \cdot 1}$$

$$c_2 = \frac{c_1}{8 \cdot 2} = \frac{c_0}{2!5 \cdot 8}$$

$$c_3 = \frac{c_2}{11 \cdot 3} = \frac{c_0}{3!5 \cdot 8 \cdot 11}$$

$$c_4 = \frac{c_3}{14 \cdot 4} = \frac{c_0}{4!5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14}$$

$$c_n = \frac{c_0}{n!5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3n+2)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

mientras que al iterar (9) obtenemos

$$c_1 = \frac{c_0}{1 \cdot 1}$$

$$c_2 = \frac{c_1}{2 \cdot 4} = \frac{c_0}{2!1 \cdot 4}$$

$$c_3 = \frac{c_2}{3 \cdot 7} = \frac{c_0}{3!1 \cdot 4 \cdot 7}$$

$$c_4 = \frac{c_3}{4 \cdot 10} = \frac{c_0}{4!1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}$$

$$c_n = \frac{c_0}{n!1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Hemos llegado así a dos soluciones en serie:

$$y_1 = c_0 x^{2/3}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3n+2)} x^n\right] \tag{10}$$

y

$$y_2 = c_0 x^0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)} x^n\right]. \tag{11}$$

Con el criterio de la razón se puede demostrar que (10) y (11) convergen ambas para todos los valores finitos de x. Asimismo, por la forma de (10) y (11), es posible ver que ninguna de esas series es múltiplo constante de la otra y, por consiguiente, que $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes en el eje x. Entonces, de acuerdo con el principio de superposición,

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1\left[x^{2/3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3n+2)} x^{n+2/3}\right]$$

$$+ C_2\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)} x^n\right]$$

es otra solución de (4). En cualquier intervalo que no contenga el origen, esta combinación representa la solución general de la ecuación diferencial. ■

Aunque el ejemplo 6 muestra el procedimiento general de aplicación del método de Frobenius, hacemos notar que no siempre podremos determinar con tanta facilidad dos soluciones o determinar dos soluciones que sean series infinitas formadas totalmente por potencias de x.

Ecuación de índices o indicativa La ecuación (6) se llama **ecuación indicativa** del problema, y los valores $r_1 = \frac{2}{3}$ y $r_2 = 0$ son las **raíces o exponentes indicativas** o simplemente **Índices** de la singularidad. En general, si $x = 0$ es un punto singular regular de (1), las funciones $xP(x)$ y $x^2Q(x)$ obtenidas de (2) son analíticas en cero; es decir, los desarrollos

$$xP(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots \quad \text{y} \quad x^2Q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots \tag{12}$$

son válidos en intervalos que tengan un radio de convergencia positivo. Después de sustituir $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ en (1) o (2) y simplificar, la ecuación indicativa es cuadrática en r, y se origina al ***igualar a cero*** el ***coeficiente total de la potencia mínima de*** x. Un desarrollo directo muestra que la ecuación indicativa general es

$$r(r-1) + \text{por} + q_0 = 0. \tag{13}$$

Con esta ecuación se obtienen los dos valores de los exponentes y se sustituyen en una relación de recurrencia como la (7). El teorema 6.2 garantiza que se puede encontrar al menos una solución en serie de la forma supuesta.

Casos de las raíces indicativas Al aplicar el método de Frobenius se pueden diferenciar tres casos, que corresponden a la naturaleza de las raíces indicativas. Para fines de nuestra descripción, supondremos que r_1 y r_2 son las soluciones ***reales*** de la ecuación indicia1 y que, cuando difieran, r_1 ***representa la raíz mayor.***

Caso I: las raíces no difieren en un entero Si r_1 y r_2 son distintas y no difieren en un entero, existen dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (1), cuya forma es

$$y_1 = \sum_{n=0} c_n x^{n+r_1}, \quad c_0 \neq 0 \tag{14a}$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}, \quad b_0 \neq 0. \tag{14b}$$

EJEMPLO 7 Caso I: dos soluciones de la forma (3)

Resuelva $2xy'' + (1 + x)y' + y = 0.$ **(15)**

SOLUCIÓN Si $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$, entonces

$$2xy'' + (1+x)y' + y = 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(2n + 2r - 1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n + r + 1)c_n x^{n+r}$$

$$= x^r \left[r(2r - 1)c_0 x^{-1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (n + r)(2n + 2r - 1)c_n x^{n-1}}_{k = n - 1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n + r + 1)c_n x^n}_{k = n} \right]$$

$$= x^r \left[r(2r - 1)c_0 x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [(k + r + 1)(2k + 2r + 1)c_{k+1} + (k + r + 1)c_k]x^k \right] = 0,$$

lo cual implica que

$$r(2r - 1) = 0 \tag{16}$$

$$(k + r + 1)(2k + 2r + 1)c_{k+1} + (k + r + 1)c_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{17}$$

En la ecuación (16) vemos que las raíces indicativas son $r_1 = \frac{1}{2}$ y $r_2 = 0$. Dado que la diferencia entre ellas no es un número entero, tenemos la garantía de contar con las soluciones indicadas en (14a) y (14b), linealmente independientes y con la forma $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1/2}$ y $y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Para $r_1 = \frac{1}{2}$ podemos dividir la ecuación (17) entre $k + \frac{3}{2}$ para obtener

$$c_{k+1} = \frac{-c_k}{2(k + 1)}$$

$$c_1 = \frac{-c_0}{2 \cdot 1}$$

$$c_2 = \frac{-c_1}{2 \cdot 2} = \frac{c_0}{2^2 \cdot 2!}$$

$$c_3 = \frac{-c_2}{2 \cdot 3} = \frac{-c_0}{2^3 \cdot 3!}$$

$$\vdots$$

$$c_n = \frac{(-1)^n c_0}{2^n n!}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

entonces

$$y_1 = c_0 x^{1/2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^n \right] = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{n+1/2}, \tag{18}$$

que converge cuando $x \geq 0$. Tal como aparece, esta serie no tiene validez para $x < 0$ por la presencia de $x^{1/2}$.

La ecuación (17), para $r_2 = 0$, genera los coeficientes

$$c_{k+1} = \frac{-c_k}{2k + 1}$$

$$c_1 = \frac{-c_0}{1}$$

$$c_2 = \frac{-c_1}{3} = \frac{c_0}{1 \cdot 3}$$

$$c_3 = \frac{-c_2}{5} = \frac{-c_0}{1 \cdot 3 \cdot 5}.$$

$$c_4 = \frac{-c_3}{7} = \frac{c_0}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}.$$

$$c_n = \frac{(-1)^n c_0}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Por consiguiente, una segunda solución de (15) es

$$y_2 = c_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)} x^n\right], \quad |x| < \infty. \tag{19}$$

La solución general es $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, en el intervalo $(0, \infty)$. ■

Cuando las raíces de la ecuación diferencial difieren en un entero positivo, podremos determinar o no dos soluciones de (1) en la forma de (3). Si no es posible, la solución que corresponde a la raíz menor contiene un término logarítmico. Cuando las raíces de la ecuación indicativa son iguales, una segunda solución contiene *siempre* un logaritmo. Este último caso es análogo a las soluciones de la ecuación diferencial de Cauchy-Euler cuando las raíces de la ecuación auxiliar son iguales. Pasaremos a los dos casos siguientes.

CASO II: las raíces difieren en un entero positivo Si $r_1 - r_2 = N$, donde N es un entero positivo, existen dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (1) con la forma

$$y_1 = \sum_{n=0} c_n x^{n+r_1}, \quad c_0 \neq 0 \tag{20a}$$

$$y_2 = C y_1(x) \ln x + \sum_{n=0} b_n x^{n+r_2}, \quad b_0 \neq 0, \tag{20b}$$

en donde C es una constante que podría ser cero.

CASO **III: raíces indicativas iguales** Si $r_1 = r_2$, siempre existen dos soluciones, linealmente independientes de la ecuación (1) que tienen la forma

$$y_1 = \sum_{n=0} c_n x^{n+r_1}, \quad c_0 \neq 0 \tag{21a}$$

$$y_2 = y_1(x) \ln x + \sum_{n=0} b_n x^{n+r_1}. \tag{21b}$$

EJEMPLO 8 **Caso II: dos soluciones con la forma de (3)**

Resuelva $xy'' + (x - 6)y' - 3y = 0$. **(22)**

SOLUCIÓN La hipótesis $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ conduce a

$$
\begin{aligned}
&xy'' + (x-6)y' - 3y \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1} - 6\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} - 3\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\
&= x^r\left[r(r-7)c_0x^{-1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(n+r)(n+r-7)c_n x^{n-1}}_{k=n-1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-3)c_n x^n}_{k=n}\right] \\
&= x^r\left[r(r-7)c_0x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty}[(k+r+1)(k+r-6)c_{k+1} + (k+r-3)c_k]x^k\right] = 0.
\end{aligned}
$$

Así $r(r-7)=0$, de suerte que $r_1=7$, $r_2=0$, $r_1-r_2=7$ y

$$(k+r+1)(k+r-6)c_{k+1} + (k+r-3)c_k = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{23}$$

Para la raíz más pequeña $r_2 = 0$, la ecuación (23) se transforma en

$$(k+1)(k-6)c_{k+1} + (k-3)c_k = 0. \tag{24}$$

Como $k-6=0$ para $k=6$, no dividiremos entre este término sino hasta que $k>6$. Vemos que

$$
\begin{aligned}
&1\cdot(-6)c_1 + (-3)c_0 = 0 \\
&2\cdot(-5)c_2 + (-2)c_1 = 0 \\
&3\cdot(-4)c_3 + (-1)c_2 = 0 \\
&\left.\begin{aligned}
&4\cdot(-3)c_4 + 0\cdot c_3 = 0 \\
&5\cdot(-2)c_5 + 1\cdot c_4 = 0 \\
&6\cdot(-1)c_6 + 2\cdot c_5 = 0 \\
&7\cdot 0c_7 + 3\cdot c_6 = 0
\end{aligned}\right\} \leftarrow \text{pero } c_0 \text{ y } c_7 \text{ pueden ser elegidas en forma arbitraria}
\end{aligned}
\qquad \text{implica } c_4 = c_5 = c_6 = 0
$$

Por consiguiente,

$$
\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{1}{2}c_0 \\
c_2 &= -\frac{1}{5}c_1 = \frac{1}{10}c_0 \\
c_3 &= -\frac{1}{12}c_2 = -\frac{1}{120}c_0.
\end{aligned} \tag{25}
$$

Para $k \geq 7$,

$$c_{k+1} = \frac{-(k-3)}{(k+1)(k-6)}c_k.$$

Al iterar esta fórmula obtenemos

$$
\begin{aligned}
c_8 &= \frac{-4}{8\cdot 1}c_7 \\
c_9 &= \frac{-5}{9\cdot 2}c_8 = \frac{4\cdot 5}{2!8\cdot 9}c_7 \\
c_{10} &= \frac{-6}{10\cdot 3}c_9 = \frac{-4\cdot 5\cdot 6}{3!8\cdot 9\cdot 10}c_7
\end{aligned}
$$

$$c_n = \frac{(-1)^{n+1}4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots (n-4)}{(n-7)!8 \cdot 9 \cdot 10 \cdots n} c_7, \quad n = 8, 9, 10, \ldots. \tag{26}$$

Si escogemos $c_7 = 0$ y $c_0 \neq 0$, llegamos a la solución polinomial

$$y_1 = c_0 \left[1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{120}x^3 \right], \tag{27}$$

pero cuando $c_7 \neq 0$ y $c_0 = 0$, una segunda solución en serie, si bien infinita, es

$$\begin{aligned} y_2 &= c_7 \left[x^7 + \sum_{n=8}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n-4)}{(n-7)!8 \cdot 9 \cdot 10 \cdots n} x^n \right] \\ &= c_7 \left[x^7 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (k+3)}{k!8 \cdot 9 \cdot 10 \cdots (k+7)} x^{k+7} \right], \quad |x| < \infty. \end{aligned} \tag{28}$$

Por último, la solución general de la ecuación (22) en el intervalo $(0, \infty)$ es

$$\begin{aligned} y &= C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \\ &= C_1 \left[1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{120}x^3 \right] + C_2 \left[x^7 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (k+3)}{k!8 \cdot 9 \cdot 10 \cdots (k+7)} x^{k+7} \right] \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Es interesante observar en el ejemplo 8 que no usamos la raíz mayor, $r_1 = 7$. Si lo hubiéramos hecho, habríamos obtenido una solución en serie* $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+7}$, donde las c_n están definidas por la ecuación (23), con $r_1 = 7$:

$$c_{k+1} = \frac{-(k+4)}{(k+8)(k+1)} c_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Al iterar esta relación de recurrencia sólo tendríamos *una* solución, la que aparece en la ecuación (28), en donde c_0 correspondería a c_7.

Cuando las raíces de la ecuación indicativa difieren en un entero positivo, *puede ser* que la segunda solución contenga un logaritmo. En la práctica esto es algo que no sabemos por anticipado, pero que queda determinado al calcular las raíces de la ecuación indicativa y examinar con detenimiento la relación de recurrencia que define a los coeficientes c_n. Como acabamos de ver en este ejemplo, también puede suceder que -por suerte-, determinemos dos soluciones que sólo comprenden potencias de x. Por otra parte, si no podemos hallar una segunda solución en serie, siempre podremos recurrir a

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} dx \tag{29}$$

que también es una solución de la ecuación $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, siempre y cuando y_1 sea una solución conocida (véase Sec. 4.2).

*Obsérvese que tanto la serie (28) como ésta comienzan en la potencia x^7. En el caso II siempre se aconseja trabajar primero con la raíz menor.

EJEMPLO 9 **Caso II: una solución de la forma (3)**

Determine la solución general de $xy'' + 3y' - y = 0$.

SOLUCIÓN Aquí el lector debe comprobar que las raíces indicativas son $r_1 = 0$, $r_2 = -2$, $r_1 - r_2 = 2$ y que con el método de Frobenius sólo se llega a una solución:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!(n+2)!} x^n = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{360}x^3 + \cdots. \tag{30}$$

Con la ecuación (29) obtenemos una segunda solución:

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\int (3/x)dx}}{y_1^2(x)}\,dx = y_1(x) \int \frac{dx}{x^3\left[1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{360}x^3 + \cdots\right]^2}$$

$$= y_1(x) \int \frac{dx}{x^3\left[1 + \frac{2}{3}x + \frac{7}{36}x^2 + \frac{1}{30}x^3 + \cdots\right]} \quad \leftarrow \text{cuadrada}$$

$$= y_1(x) \int \frac{1}{x^3}\left[1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{19}{270}x^3 + \cdots\right] dx \quad \leftarrow \text{división larga}$$

$$= y_1(x) \int \left[\frac{1}{x^3} - \frac{2}{3x^2} + \frac{1}{4x} - \frac{19}{270} + \cdots\right] dx$$

$$= y_1(x)\left[-\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x} + \frac{1}{4}\ln x - \frac{19}{270}x + \cdots\right]$$

o sea
$$y_2 = \frac{1}{4}y_1(x)\ln x + y_1(x)\left[-\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x} - \frac{19}{270}x + \cdots\right], \tag{31}$$

Por consiguiente, en el intervalo $(0, \infty)$ la solución general es

$$Y = C_1 y_1(x) + C_2\left[\frac{1}{4}y_1(x)\ln x + y_1(x)\left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x} - \frac{19}{270}x + \cdots\right)\right], \tag{32}$$

donde $y_1(x)$ está definida por (30). ■

EJEMPLO 10 **Caso III: determinación de la segunda solución**

Halle la segunda solución de $xy'' + y' - 4y = 0$.

SOLUCIÓN La solución propuesta $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ conduce a

$$xy'' + y' - 4y = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} - 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)^2 c_n x^{n+r-1} - 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

$$= x^r\left[r^2c_0x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r)^2c_nx^{n-1} - 4\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right]$$

$$k = n - 1 \qquad k = n$$

$$= x^r\left[r^2c_0x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty}[(k+r+1)^2c_{k+1} - 4c_k]x^k\right] = 0.$$

Por lo tanto, $r^2 = 0$ y, por lo mismo, las raíces indicativas son iguales: $r_1 = r_2 = 0$. Además, tenemos que

$$(k + r + 1)^2c_{k+1} - 4c_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{33}$$

Está claro que la raíz $r_1 = 0$ sólo da una solución, que corresponde a los coeficientes definidos por iteración de

$$c_{k+1} = \frac{4c_k}{(k+1)^2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

El resultado es

$$y_1 = c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(n!)^2}x^n, \quad |x| < \infty. \tag{34}$$

Para obtener la segunda solución linealmente independiente escogemos $c_0 = 1$ en (34) y empleamos (29):

$$y_2 = y_1(x)\int\frac{e^{-\int(1/x)dx}}{y_1^2(x)}dx = y_1(x)\int\frac{dx}{x\left[1 + 4x + 4x^2 + \frac{16}{9}x^3 + \cdots\right]^2}$$

$$= y_1(x)\int\frac{dx}{x\left[1 + 8x + 24x^2 + \frac{16}{9}x^3 + \cdots\right]}$$

$$= y_1(x)\int\frac{1}{x}\left[1 - 8x + 40x^2 - \frac{1472}{9}x^3 + \cdots\right]dx$$

$$= y_1(x)\int\left[\frac{1}{x} - 8 + 40x - \frac{1472}{9}x^2 + \cdots\right]dx$$

$$= y_1(x)\left[\ln x - 8x + 20x^2 - \frac{1472}{27}x^3 + \cdots\right].$$

Así, en el intervalo $(0, \infty)$, la solución general es

$$y = C_1y_1(x) + C_2\left[y_1(x)\ln x + y_1(x)\left(-8x + 20x^2 - \frac{1472}{27}x^3 + \cdots\right)\right],$$

en donde $y_1(x)$ está definida por (34).

Empleo de computadoras Resulta obvio que las operaciones de los ejemplos 9 y 10, como elevar una serie al cuadrado, la división larga entre una serie y la integración del cociente, se pueden realizar a mano; pero nuestra existencia se puede facilitar porque todas esas operaciones, incluyendo la multiplicación indicada en (31), se pueden efectuar con relativa facilidad con ayuda de un sistema algebraico de computación como Mathematica, Maple o Derive.

Observación

i) A propósito no hemos mencionado algunas otras complicaciones que surgen cuando se resuelve una ecuación diferencial como la (1) alrededor de un punto singular x_0. Las raíces **índices** r_1 y r_2 pueden ser números complejos. En este caso, la igualdad $r_1 > r_2$ carece de significado y se debe reemplazar con $\mathrm{Re}(r_1) > \mathrm{Re}(r_2)$ [si $r = \alpha + i\beta$, entonces $\mathrm{Re}(r) = \alpha$]. En particular, cuando la ecuación **índice** (o indicativa) tiene coeficientes reales, las raíces serán un par complejo conjugado $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, y $r_1 - r_2 = 2i\beta \neq$ entero. Así, para $x_0 = 0$, siempre existen dos soluciones, $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}$ y $y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_2}$. Ambas soluciones dan valores complejos de y para toda selección de x real. Podemos superar esta dificultad aplicando el principio de superposición y formando las combinaciones lineales adecuadas de $y_1(x)$ y $y_2(x)$ para producir soluciones reales (véase el caso III en la sección 4.7).

ii) Si $x_0 = 0$ es un punto singular irregular, es posible que no podamos determinar ***solución*** alguna de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$.

iii) En los estudios más avanzados de ecuaciones diferenciales, a veces es importante examinar la naturaleza de un punto singular en ∞. Se dice que una ecuación diferencial tiene un punto singular en ∞ si, después de sustituir $z = 1/x$, la ecuación que resulta tiene un punto singular en $z = 0$. Por **ejemplo**, la ecuación diferencial $y'' + xy = 0$ no tiene puntos singulares finitos; sin embargo, de acuerdo con la regla de la cadena, la sustitución $z = 1/x$ transforma la ecuación en

$$z^5 \frac{d^2y}{dz^2} + 2z^4 \frac{dy}{dz} + y = 0.$$

(Compruébelo.) Al examinar $P(z) = 2/z$ y $Q(z) = 1/z^5$ se demuestra que $z = 0$ es un punto singular irregular de la ecuación; en consecuencia, ∞ es un punto singular irregular.

EJERCICIOS 6.3

Determine los puntos singulares de cada ecuación diferencial en los problemas 1 a 10. Clasifique cada punto singular en regular o irregular.

1. $x^3y'' + 4x^2y' + 3y = 0$
2. $xy'' - (x + 3)^{-2}y = 0$
3. $(x^2 - 9)^2y'' + (x + 3)y' + 2y = 0$
4. $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{(x-1)^3}y = 0$
5. $(x^3 + 4x)y'' - 2xy' + 6y = 0$
6. $x^2(x - 5)^2y'' + 4xy' + (x^2 - 25)y = 0$
7. $(x^2 + x - 6)y'' + (x + 3)y' + (x - 2)y = 0$
8. $x(x' + 1)^2y'' + y = 0$

9. $x^3(x^2 - 25)(x - 2)^2y'' + 3x(x - 2)y' + 7(x + 5)y = 0$

10. $(x^3 \quad 2x^2 \quad 3x)^2y'' + x(x - 3)^2y' \quad (x + 1)y = 0$

En los problemas 11 a 22 demuestre que las raíces indicativas no difieren en un entero. Use el método de Frobenius para llegara dos soluciones linealmente independientes en serie alrededor del punto singular regular $x_0 = 0$. Forme la solución general en $(0, \infty)$.

11. $2xy'' - y' + 2y = 0$ 12. $2xy'' + 5y' + xy = 0$

13. $4xy'' + y'$ 14. $xy' + 2x^2y'' + (1)y = 0$

15. $3xy'' + (2 - x)y' - y = 0$ 16. $x^2y'' - \left(x - \frac{2}{9}\right)y = 0$

17. $2xy'' - (3 + 2x)y' + y = 0$ 18. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{4}{9}\right) = 0$

19. $9x^2y'' + 9x^2y' + 2y = 0$ 20. $2x^2y'' + 3xy' + (2x - 1)y = 0$

21. $2x^2y'' - x(x - 1)y' - y = 0$ 22. $x(x - 2)y'' + y' - 2y = 0$

En los problemas 23 a 30 demuestre que las raíces de la ecuación indicativas difieren en un número entero. Aplique el método de Frobenius para obtener dos soluciones linealmente independientes en serie alrededor del punto singular regular $x_0 = 0$. Forme la solución general en $(0, \infty)$.

23. $xy'' + 2y' - xy = 0$ 24. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$

25. $x(x - 1)y'' + 3y' - 2y = 0$ 26. $y'' + \frac{3}{x}y' - 2y = 0$

27. $xy'' + (1 - x)y' - y = 0$ 28. $xy'' + y = 0$

29. $xy'' + y' + y = 0$ 30. $xy'' - xy' + y = 0$

6.4 DOS ECUACIONES ESPECIALES

■ *Ecuación de Bessel* ■ *Ecuación de Legendre* ■ *Solución de la ecuación de Bessel* ■ *Funciones de Bessel de primera clase* ■ *Funciones de Bessel de segunda clase* ■ *Ecuación paramétrica de Bessel* ■ *Relaciones de recurrencia* ■ *Funciones de Bessel esféricas* ■ *Solución de la ecuación de Legendre* ■ *Polinomios de Legendre*

Las dos ecuaciones

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{1}$$

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0 \tag{2}$$

aparecen con frecuencia en estudios superiores de matemáticas aplicadas, física e ingeniería. Se llaman **ecuación de Bessel y ecuación de Legendre,** respectivamente. Para resolver la (1) supondremos que $\nu \geq 0$, mientras que en la (2) sólo consideraremos el caso en que n es entero no negativo. Como se trata de obtener soluciones de cada ecuación en serie alrededor de $x = 0$,

advertimos que el origen es un punto regular singular de la ecuación de Bessel pero es un punto ordinario de la ecuación de Legendre.

Solución de la ecuación de Bessel Si suponemos que $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$, entonces

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2}$$

$$- \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

$$= c_0(r^2 - r + r - \nu^2)x^r$$

$$+ x^r \sum_{n=1}^{\infty} c_n[(n+r)(n+r-1) + (n+r) - \nu^2]x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}$$

$$= c_0(r^2 - \nu^2)x^r + x^r \sum_{n=1}^{\infty} c_n[(n+r)^2 - \nu^2]x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}. \tag{3}$$

En (3) vemos que la ecuación indicativa es $r^2 - \nu^2 = 0$, de modo que las raíces índice son $r_1 = \nu$ y $r_2 = -\nu$. Cuando $r_1 = \nu$, la ecuación (3) se transforma en

$$x^\nu \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n+2\nu)x^n + x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}$$

$$= x^\nu \left[(1+2\nu)c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n+2\nu)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} \right]$$

$$k = n - 2 \qquad k = n$$

$$= x^\nu \left[(1+2\nu)c_1 x + \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+2+2\nu)c_{k+2} + c_k]x^{k+2} \right] = 0.$$

Por lo tanto, se debe cumplir que

$$(1+2\nu)c_1 = 0$$

$$(k+2)(k+2+2\nu)c_{k+2} + c_k = 0$$

0 sea que

$$c_{k+2} = \frac{-c_k}{(k+2)(k+2+2\nu)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

La opción $c_1 = 0$ en esta ecuación trae como consecuencia que $c_3 = c_5 = c_7 = \ldots = 0$, así que cuando $k = 0, 2, 4, \ldots$ vemos, después de hacer $k + 2 = 2n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, que

$$c_{2n} = -\frac{c_{2n-2}}{2^2 n(n+\nu)}. \tag{5}$$

Así

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2 \cdot 1 \cdot (1+\nu)}$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{2^2 \cdot 2(2+\nu)} = \frac{c_0}{24 \cdot 1 \cdot 2(1+\nu)(2+\nu)}$$

$$c_6 = -\frac{c_4}{22 \cdot 3(3+\nu)} = -\frac{c_0}{2^6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)}$$

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n} n!(1+\nu)(2+\nu)\cdots(n+\nu)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{6}$$

Se acostumbra elegir un valor patrón específico para c_0, que es

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1+\nu)},$$

en donde $\Gamma(1+\nu)$ es la función gamma. (Véase el Apéndice 1.) Como esta función posee la cómoda propiedad de que $\Gamma(1+\alpha) = \alpha\Gamma(\alpha)$, podemos reducir el producto indicado en el denominador de (6) a un solo término; por ejemplo,

$$\Gamma(1+\nu+1) = (1+\nu)\Gamma(1+\nu)$$
$$\Gamma(1+\nu+2) = (2+\nu)\Gamma(2+\nu) = (2+\nu)(1+\nu)\Gamma(1+\nu).$$

Por consiguiente, podemos expresar (6) en la forma

$$c_{2n} = \frac{(-1)}{2^{2n+\nu} n!(1+\nu)(2+\nu)\cdots(n+\nu)\Gamma(1+\nu)} = \frac{(-1)}{2^{2n+\nu} n!\Gamma(1+\nu+n)}$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Funciones de Bessel de primera clase La solución en serie $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n+\nu}$ se suele representar mediante $J_\nu(x)$:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} \tag{7}$$

Si $\nu \geq 0$, la serie converge al menos en el intervalo $[0, \infty)$. También, para el segundo exponente $r_2 = -\nu$, obtenemos, exactamente del mismo modo,

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1-\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu}. \tag{8}$$

Las funciones $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ se llaman **funciones de Bessel de primera clase o de primera especie,** de orden ν y $-\nu$, respectivamente. Según el valor de ν, la ecuación (8) puede contener potencias negativas de x y, por consiguiente, converger en $(0, \infty)$.*

Es necesario tener cierto cuidado al escribir la solución general de (1). Cuando $\nu = 0$, (7) y (8) son iguales. Si $\nu > 0$ y $r_1 - r_2 = \nu - (-\nu) = 2\nu$ no es un entero positivo; entonces, de acuerdo con el caso 1 de la sección 6.3, $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son soluciones linealmente independientes de (1) en $(0, \infty)$, así que la solución general del intervalo es $y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$. Pero también sabemos que, de acuerdo con el caso II de la sección 6.3, cuando $r_1 - r_2 = 2\nu$ es un entero positivo, *quizá* exista una segunda solución de (1) en forma de serie. En este segundo caso hay dos posibilidades: cuando $\nu = m$ = entero positivo, $J_{-\nu}(x)$, definido por (8) y $J_m(x)$ no son soluciones linealmente independientes. Se puede demostrar que J_{-m} es un múltiplo constante de J_m [véase la propiedad i) en la página 283]. Además, $r_1 - r_2 = 2\nu$ puede ser un entero positivo

*Al reemplazar x por $|x|$, las series de las ecuaciones (7) y (8) convergen para $0 < |x| < \infty$.

cuando ν es la mitad de un entero positivo impar. Se puede demostrar que, en este caso, $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son linealmente independientes; en otras palabras, la solución general de (1) en (0, ∞) es

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x), \qquad \text{uf entero.} \tag{9}$$

La figura 6.2 ilustra las gráficas dey = *Jo(x) y y* = $J_1(x)$.

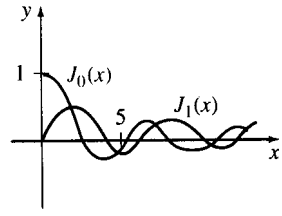


FIGURA 6.2

EJEMPLO 1 **Solución general: ν no es entero**

Si $\nu^2 = \frac{1}{4}$ y $\nu = \frac{1}{2}$, la solución general de la ecuación $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ en (0, ∞) es $y = c_1J_{1/2}(x) + c_2J_{-1/2}(x)$. ■

Funciones de Bessel de segunda clase Si $\nu \neq$ entero, la función definida por la combinación lineal

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos \nu\pi\, J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen} \nu\pi} \tag{10}$$

y la función $J_\nu(x)$ son soluciones linealmente independientes de (1); por consiguiente, otra forma de la solución general de (1) es $y = c_1 J_\nu(x) + c_2Y_\nu(x)$, siempre y cuando $\nu \neq$ entero. Cuando $\nu \to m$ (donde m es entero), la ecuación (10) tiende a la forma indeterminada 0/0; sin embargo, con la regla de L'Hôpital se puede demostrar que lím, $_{\to m} Y_\nu(x)$ existe. Además, la función

$$Y_m(x) = \lim_{\nu \to m} Y_\nu(x)$$

y $J_m(x)$ son soluciones linealmente independientes de $x^2y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$; por lo tanto, para *cualquier* valor de ν, la solución general de (1) en (0, ∞) se puede escribir

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2Y_\nu(x). \tag{11}$$

$Y_\nu(x)$ se llama **función de Bessel de segunda clase,** o de segunda especie, de orden ν. En la figura 6.3 aparecen las gráficas de $Y_0(x)$ y $Y_1(x)$.

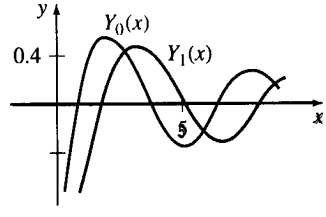


FIGURA 6.3

EJEMPLO 2 **Solución general: ν entero**

La solución general de la ecuación $x^2y'' + xy' + (x^2 - 9)y = 0$, en $(0, \infty)$, es $y = c_1J_3(x) + c_2Y_3(x)$. Esto lo podemos ver con la ecuación (ll) si identificamos a $\nu^2 = 9$ y, por consiguiente, $\nu = 3$. ■

Aveces es posible transformar determinada ecuación diferencial en la forma de la ecuación (1) cambiando la variable. Entonces se puede expresar la solución general de la ecuación original en términos de funciones de Bessel. En el ejemplo 3 se muestra esta técnica.

EJEMPLO 3 **Regreso al resorte desgastable**

En la sección 5.1 describimos que un modelo matemático del movimiento libre no amortiguado de una masa fija a un resorte que se desgasta es $mx'' + ke^{-\alpha t}x = 0$, $\alpha > 0$. Ahora ya podemos determinar la solución general de esta ecuación. Se deja como problema demostrar que el cambio de las variables $s = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}e^{-\alpha t/2}$ transforma la ecuación diferencial del resorte que se desgasta en la forma

$$s^2\frac{d^2x}{ds^2} + s\frac{dx}{ds} + s^2x = 0.$$

Reconocemos que esta ecuación tiene la forma de (1) con $\nu = 0$, donde los símbolos x y s desempeñan las funciones dey y x, respectivamente. La solución general de la nueva ecuación es $x = c_1J_0(x) + c_2Y_0(s)$. Si restituimos s, la solución general de $mx'' + ke^{-\alpha t}x = 0$ es

$$x(t) = c_1J_0\left(\frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}e^{-\alpha t/2}\right) + c_2Y_0\left(\frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}e^{-\alpha t/2}\right).$$

Véanse los problemas 39 y 40 en los ejercicios 6.4. ■

El otro modelo de un resorte de la sección 5.1, cuyas características cambian al paso del tiempo, era $mx'' + ktx = 0$. Al dividir entre m reconocemos que se trata de la ecuación de Airy, $y'' + \alpha^2xy = 0$. Véase el ejemplo 4, sección 6.2, La solución general de la ecuación diferencial de Airy también se puede expresar en términos de funciones de Bessel. Véanse los problemas 41 a 43 en los ejercicios 6.4.

Ecuación paramétrica de Bessel Si reemplazamos x con Xx en la ecuación (1) y aplicamos la regla de la cadena, llegaremos a una forma alternativa de la ecuación de Bessel, la **ecuación paramétrica de Bessel:**

$$x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - \nu^2)y = 0. \tag{12}$$

La solución general de (12) es

$$y = c_1J_\nu(\lambda x) + c_2Y_\nu(\lambda x). \tag{13}$$

Propiedades A continuación citaremos algunas de las propiedades más útiles de las funciones de Bessel de orden m, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

$$\text{(i) } J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x) \qquad (ii)\ J_m(-x) = (-1)^m J_m(x)$$

$$(iii)\ J_m(0) = \begin{cases} 0, & m > 0 \\ 1, & m = 0 \end{cases} \qquad (iv)\ \lim_{x \to 0^+} Y_m(x) = -\infty$$

Obsérvese que la propiedad $ii)$ indica que $J_m(x)$ es una función par si m es un entero par, y una función impar si m es entero impar. Las gráficas de $Y_0(x)$ y $Y_1(x)$ en la figura 6.3 ilustran la propiedad iv): Y,(x) no es acotada en el origen. Esto último no es obvio al examinar (10). Se puede demostrar, sea a partir de (10) o por los métodos de la sección 6.3 que cuando $x > 0$,

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \left[\gamma + \ln \frac{x}{2} \right] - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} \right) \left(\frac{x}{2} \right)^{2k},$$

en donde $\gamma = 0.57721566\ldots$ es la **constante de Euler.** A causa de la presencia del término logarítmico, $Y_0(x)$ es discontinua en $x = 0$.

Valores numéricos En la tabla 6.1 se presentan algunos valores de las funciones $J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$ y $Y_1(x)$ para determinados valores de x. Los primeros cinco ceros no negativos de esas funciones aparecen en la tabla 6.2.

TABLA 6.1 Valores numéricos de J_0, J_1, Y_0 y Y_1

0	1.0000	0.0000	—	—
1	0.7652	0.4401	0.0883	-0.7812
2	0.2239	0.5767	0.5104	-0.1070
3	-0.2601	0.3391	0.3769	0.3247
4	-0.3971	-0.0660	-0.0169	0.3979
5	-0.1776	-0.3276	-0.3085	0.1479
6	0.1506	-0.2767	-0.2882	-0.1750
7	0.3001	-0.0047	-0.0259	-0.3027
8	0.1717	0.2346	0.2235	-0.1581
9	-0.0903	0.2453	0.2499	0.1043
10	-0.2459	0.0435	0.0557	0.2490
11	-0.1712	-0.1768	-0.1688	0.1637
12	0.0477	-0.2234	-0.2252	-0.0571
13	0.2069	-0.0703	-0.0782	-0.2101
14	0.1711	0.1334	0.1272	-0.1666
15	-0.0142	0.2051	0.2055	0.0211

Relación de recurrencia diferencial Las fórmulas de recurrencia que relacionan las funciones de Bessel de distintos órdenes son importantes en teoría y en las aplicaciones. En el ejemplo siguiente deduciremos una **relación de recurrencia diferencial.**

TABLA 6.2 Ceros de J_0, J_1, Y_0 y Y_1

$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$
2.4048	0.0000	0.8936	2.1971
5.5201	3.8317	3.9577	5.4297
8.6537	7.0156	7.0861	8.5960
11.7915	10.1735	10.2223	11.7492
14.9309	13.3237	13.3611	14.8974

EJEMPLO 4 **Deducción mediante definición de series**

Deduzca la fórmula $xJ_\nu'(x) = \nu J_\nu(x) - xJ_{\nu+1}(x)$.

SOLUCIÓN Una consecuencia de (7) es que

$$\begin{aligned} xJ_\nu'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+\nu)}{n!\Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} \\ &= \nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n!\Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} \\ &= \nu J_\nu(x) + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)}{(n-1)!\Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu-1} \\ &= \nu J_\nu(x) - x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(2+\nu+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu+1} = \nu J_\nu(x) - xJ_{\nu+1}(x). \end{aligned}$$

El resultado del ejemplo 4 se puede escribir en forma alternativa. Al dividir $xJ_\nu'(x) - \nu J_\nu(x) = -xJ_{\nu+1}$ (2) entre x se obtiene

$$J_\nu'(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x).$$

Esta última expresión es una ecuación diferencial lineal de primer orden en $J_\nu(x)$. Multiplicamos ambos lados de la igualdad por el factor integrante $x^{-\nu}$ y llegamos a

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu}J_\nu(x)] = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x). \tag{14}$$

En forma parecida se puede demostrar que

$$\frac{d}{dx}[x^{\nu}J_\nu(x)] = x^{\nu}J_{\nu-1}(x). \tag{15}$$

Véase el problema 20 de los ejercicios 6.4. Las relaciones de recurrencia diferenciales (14) y (15) también son válidas para la función de Bessel de segunda clase, $Y_\nu(x)$. Nótese que cuando $\nu = 0$, una consecuencia de (14) es

$$J_0'(x) = -J_1(x) \qquad \text{y} \qquad Y_0'(x) = -Y_1(x). \tag{16}$$

En el problema 40 de los ejercicios 6.4 aparece una aplicación de estos resultados.

Cuando ν = la mitad de un entero impar, se puede expresar $J_\nu(x)$ en términos de sen x, cos x y potencias de x. Estas funciones de Bessel se denominan **funciones de Bessel esféricas.**

EJEMPLO 5 **Función de Bessel esférica con $\nu = \frac{1}{2}$**

Determine una expresión alternativa de $J_{1/2}(x)$. Aplique el hecho que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

SOLUCIÓN Con $\nu = \frac{1}{2}$, de acuerdo con (7),

$$J_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1 + \frac{1}{2} + n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1/2}.$$

En vista de la propiedad $\Gamma(1 + \alpha) = \alpha\Gamma(\alpha)$, obtenemos

$$n = 0: \quad \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$n = 1: \quad \Gamma\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2^2}\sqrt{\pi}$$

$$n = 2: \quad \Gamma\left(1 + \frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5 \cdot 3}{2^3}\sqrt{\pi} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^3 4 \cdot 2}\sqrt{\pi} = \frac{5!}{2^5 2!}\sqrt{\pi}$$

$$n = 3: \quad \Gamma\left(1 + \frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7 \cdot 5!}{2^6 2!}\sqrt{\pi} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2^6 \cdot 6 \cdot 2!}\sqrt{\pi} = \frac{7!}{2^7 3!}\sqrt{\pi}.$$

En general,

$$\Gamma\left(1 + \frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}.$$

Por consiguiente,

$$J_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\dfrac{(2n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Puesto que la serie del último renglón es la serie de Maclaurin para sen x, hemos demostrado que

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x. \qquad \blacksquare$$

Solución de la ecuación de Legendre Dado que $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación (2), suponemos una solución en la forma $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$; en consecuencia,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = (1 - x^2)\sum_{k=0}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-2} - 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k k x^k + n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^k - 2\sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^k + n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

$$= [n(n+1)c_0 + 2c_2]x^0 + [n(n+1)c_1 - 2c_1 + 6c_3]x$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=4}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-2}}_{j = k-2} - \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^k}_{j = k} - 2\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} c_k k x^k}_{j = k} + n(n+1)\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k}_{j = k}$$

$$= [n(n+1)c_0 + 2c_2] + [(n-1)(n+2)c_1 + 6c_3]x$$

$$+ \sum_{j=2}^{\infty}[(j+2)(j+1)c_{j+2} + (n-j)(n+j+1)c_j]x^j = 0$$

lo cual significa que

$$n(n+1)c_0 + 2c_2 = 0$$

$$(n-1)(n+2)c_1 + 6c_3 = 0$$

$$(j+2)(j+1)c_{j+2} + (n-j)(n+j+1)c_j = 0$$

0 sea

$$c_2 = -\frac{n(n+1)}{2!}c_0$$

$$c_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!}c_1$$

$$c_{j+2} = -\frac{(n-j)(n+j+1)}{(j+2)(j+1)}c_j, \quad j = 2, 3, 4, \ldots. \tag{17}$$

Al iterar esta fórmula se obtiene

$$c_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{4\cdot 3}c_2 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}c_0$$

$$c_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{5\cdot 4}c_3 = \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}c_1$$

$$c_6 = -\frac{(n-4)(n+5)}{6\cdot 5}c_4 = -\frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}c_0$$

$$c_7 = -\frac{(n-5)(n+6)}{7\cdot 6}c_5$$

$$= -\frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}c_1$$

etc. Entonces, cuando menos para $|x| < 1$ se obtienen dos soluciones linealmente independientes en series de potencias:

$$y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4\right.$$

$$- \frac{(n-4)(n-2)n(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}x^6 + \cdots \Big] \tag{18}$$

$$y_2(x) = c_1\left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5\right.$$

$$\left. - \frac{(n-5)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}x^7 + \cdots\right]$$

Obsérvese que si n es un entero par, la primera serie termina, mientras que $y_2(x)$ es una serie infinita; por ejemplo, si $n = 4$, entonces

$$y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{4\cdot 5}{2!}x^2 + \frac{}{2\cdot 4!5\cdot 7}x^4\right] = c_0\left[1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x\right]$$

De igual manera, cuando n es un entero impar, la serie de $y_2(x)$ termina con x^n; esto es, ***cuando n es un entero no negativo, se obtiene una solución en forma de polinomio de grado n*** de la ecuación de Legendre.

Como sabemos que un múltiplo constante de una solución de la ecuación de Legendre también es una solución, se acostumbra elegir valores específicos de c_0 o c_1, dependiendo de si n es un entero positivo par 0 impar, respectivamente. Para n = 0 se elige $c_0 = 1$, y para $n = 2, 4, 6, \ldots$.

$$c_0 = (-1)^{n/2}\frac{1\cdot 3\cdots(n-1);}{2\cdot 4\cdots n}$$

mientras que para $n = 1$ se escoge $c_1 = 1$, y para $n = 3, 5, 7, \ldots$.

$$c_1 = (-1)^{(n-1)/2}\frac{1\cdot 3\cdots n}{2\cdot 4\cdots(n-1)}.$$

Por ejemplo, cuando n = 4,

$$y_1(x) = (-1)^{4/2}\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left[1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4\right] = \frac{1}{8}(35x4 - 30x^2 + 3).$$

Polinomios de Legendre Estas soluciones polinomiales específicas de grado n se llaman **polinomios de Legendre y** se representan con P,(x). De las series para $y_1(x)$ y $y_2(x)$, y con las elecciones de c_0 y c_1 que acabamos de describir, vemos que los primeros polinomios de Legendre son

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \tag{19}$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \qquad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

Recuékdese que $P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x), \ldots$ son, a su vez, soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} n = 0: &\quad (1 - x^2)y'' - 2xy' = 0 \\ n = 1: &\quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ n = 2: &\quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0 \\ n = 3: &\quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Las gráficas de los primeros cuatro polinomios de Legendre en el intervalo $-1 \le x \le 1$ aparecen en la figura 6.4.

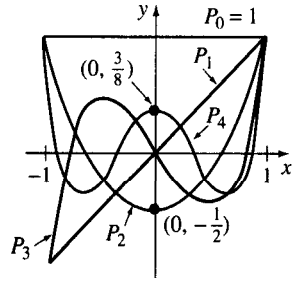


FIGURA 6.4

Propiedades En las ecuaciones (19) y en la figura 6.4 se pueden apreciar las siguientes propiedades de los polinomios de Legendre:

$$\text{(i)}\ P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

$$\textit{(ii)}\ P_n(1) = 1 \qquad \text{(iii)}\ P_n(-1) = (-1)^n$$

$$\text{(iv)}\ P_n(0) = 0,\ n \text{ impar} \qquad \textit{(v)}\ P_n'(0) = 0,\ n \text{ par}$$

La propiedad *i)* indica que $P_n(x)$ es función par o impar cuando n es par o impar.

Relación de recurrencia Las relaciones de recurrencia que relacionan los polinomios de Legendre de diversos grados son muy importantes en algunos aspectos de las aplicaciones. Deduciremos una mediante la fórmula

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n. \tag{21}$$

La función del lado izquierdo **se** llama **función generadora** para los polinomios de Legendre. Su deducción es consecuencia de la serie binomial y se deja como ejercicio. **Véase** el problema 49 en los ejercicios 6.4.

Al derivar ambos lados de (21) con respecto a t se obtiene

$$(1 - 2xt + t^2)^{-3/2}(x - t) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}$$

de modo que, después de multiplicar por $1 - 2xt + t^2$ tenemos

$$(x - t)(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = (1 - 2xt + t^2)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}$$

o sea
$$(x - t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = (1 - 2xt + t^2)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}. \tag{22}$$

Efectuamos la multiplicación y reformulamos esta ecuación como sigue:

$$\sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} + 2x\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n+1} = 0$$

o sea
$$x + x^2t + \sum_{n=2}^{\infty} xP_n(x)t^n - t - \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} - x \quad 2\left(\frac{3x^2-1}{2}\right)t$$
$$- \sum_{n=3}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} + 2x^2t + 2x\sum_{n=2}^{\infty} nP_n(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n+1} = 0.$$

Con las simplificaciones, anulaciones y cambios adecuados de índices en las sumatorias se llega a

$$\sum_{k=2}^{\infty} [-(k+1)P_{k+1}(x) + (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x)]t^k = 0.$$

Igualamos a cero el coeficiente total de t^k para obtener la relación de recurrencia con tres términos

$$(k+1)\,P_{k+1}(x) - (2k+1)xP_k(x) + kP_{k-1}(x) = 0, \quad k = 2, 3, 4, \ldots. \tag{23}$$

Esta fórmula también es válida cuando $k = 1$.

En las ecuaciones (19) presentamos los seis primeros polinomios de Legendre. Si, por ejemplo, hubiéramos querido determinar $P_6(x)$, pudimos usar (23) con $k = 5$. Esta relación expresa $P_6(x)$ en función de las cantidades conocidas $P_4(x)$ y $P_5(x)$. Véase el problema 51 en los ejercicios 6.4.

EJERCICIOS 6.4

En los problemas 1 a 8 determine la solución general de la ecuación diferencial respectiva en $(0, \infty)$.

1. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$

2. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$

3. $4x^2y'' + 4xy' + (4x^2 - 25)y = 0$

4. $16x^2y'' + 16xy' + (16x^2 - 1)y = 0$

5. $xy'' + y' + xy = 0$

6. $\frac{d}{dx}[xy'] + \left(x - \frac{4}{x}\right)y = 0$

7. $x^2y'' + xy' + (9x^2 - 4)y = 0$

8. $x^2y'' + xy' + \left(36x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$

9. Con el cambio de variable $y = x^{-1/2}v(x)$ determine la solución general de la ecuación

$$x^2y'' + 2xy' + \lambda^2x^2y = 0, \qquad x > 0.$$

10. Compruebe que la ecuación diferencial

$$xy'' + (1 - 2n)y' + xy = 0, \qquad x > 0$$

posee la solución particular $y = x^nJ_n(x)$.

11. Compruebe que la ecuación diferencial

$$xy'' + (1 + 2n)y' + xy = 0, \qquad x > 0$$

tiene la solución particular $y = x^{-n}J_n(x)$.

12. Compruebe que la ecuación diferencial

$$x^2y'' + \left(\lambda^2x^2 - \nu^2 + \frac{1}{4}\right)y = 0, \quad x > 0$$

tiene la solución particular $y = \sqrt{x}J_\nu(\lambda x)$, donde $\lambda > 0$.

En los problemas 13 a 18 aplique los resultados de los problemas 10, 11 y 12 para hallar una solución particular en $(0, \infty)$ de la ecuación diferencial dada.

13. $y'' + y = 0$ **14.** $xy'' - y' + xy = 0$

15. $xy'' + 3y' + xy = 0$ **16.** $4x^2y'' + (16x^2 + 1)y = 0$

17. $x^2y'' + (x^2 - 2)y = 0$ **18.** $xy'' - 5y' + xy = 0$

Deduzca la relación de recurrencia en los problemas 19 a 22.

19. $xJ'_\nu(x) = -\nu J_\nu(x) + xJ_{\nu-1}(x)$ **[Sugerencia:** $2n + \nu = 2(n + \nu) - \nu$.]

20. $\dfrac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x)$

21. $2\nu J_\nu(x) = xJ_{\nu+1}(x) + xJ_{\nu-1}(x)$ **22.** $2J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)$

En los problemas 23 a 26 aplique (14) o (15) para llegar al resultado respectivo.

23. $\displaystyle\int_0^x rJ_0(r)\,dr = xJ_1(x)$ **24.** $J'_0(x) = J_{-1}(x) = -J_1(x)$

25. $\displaystyle\int x^nJ_0(x)\,dx = x^nJ_1(x) + (n - 1)x^{n-1}J_0(x) - (n - 1)^2\int x^{n-2}J_0(x)\,dx$

26. $\displaystyle\int x^3J_0(x)\,dx = x^3J_1(x) + 2x^2J_0(x) - 4xJ_1(x) + c$

27. Proceda como en el ejemplo 5 para expresar a $J_{-1/2}(x)$ en términos de $\cos x$ y una potencia de x.

En los problemas 28 a 33 aplique la relación de recurrencia del problema 21 y los resultados que obtuvo en el problema 27 y en el ejemplo 5, a fin de expresar la función de Bessel respectiva en términos de sen x, $\cos x$ y potencias de x.

28. $J_{3/2}(x)$ **29.** $J_{-3/2}(x)$

30. $J_{5/2}(x)$ **31.** $J_{-5/2}(x)$

32. $J_{7/2}(x)$ 33. $J_{-7/2}(x)$

34. Demuestre que $i^{-\nu}J_\nu(ix)$, $i^2 = -1$ es una función real. Esta función, definida por $I_\nu(x) = i^{-\nu}J_\nu(ix)$ se llama **función modificada de Bessel de primera clase** de orden ν.

35. Determine la solución general de la ecuación diferencial

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0, \qquad x > 0,\ \nu \neq \text{entero}.$$

[Sugerencia: $i^2x^2 = -x^2$.]

36. Si $y_1 = J_0(x)$ es una solución de la ecuación de Bessel de orden cero, compruebe que otra solución es

$$y_2 = J_0(x)\ln x + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \frac{11x^6}{13{,}824} - \cdots.$$

37. Emplee (8) con $\nu = m$ (donde m es un entero positivo) con el hecho de que $1/\Gamma(N) = 0$ (donde N es un entero negativo) y demuestre que

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x).$$

38. Emplee (7) con $\nu = M$ (donde m es entero no negativo), para demostrar que

$$J_m(-x) = (-1)^m J_m(x).$$

39. Aplique el cambio de variables $s = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}e^{-\alpha t/2}$ para demostrar que la ecuación diferencial de un resorte que se desgasta, $mx'' + ke^{-\alpha t}x = 0$, $\alpha > 0$, se transforma en

$$s^2\frac{d^2x}{ds^2} + s\frac{dx}{ds} + s^2x = 0.$$

40. **a)** Emplee la solución general del ejemplo 3 para resolver el problema de valor inicial

$$4x'' + e^{-0.1t}x = 0, \qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = -\frac{1}{2}.$$

Use la tabla 6.1 y las ecuaciones (16) o un SAC para evaluar los coeficientes.

b) Con un SAC grafique la solución que obtuvo en la parte a), en el intervalo $0 \le t \le 200$. ¿La gráfica corrobora su conjetura en el problema 15, ejercicios 5.17

41. Demuestre que $y = x^{1/2}w(\frac{2}{3}\alpha x^{3/2})$ es una solución de la **ecuación diferencial de Airy,** $y'' + \alpha^2xy = 0$, $x > 0$ siempre que w sea una solución de la ecuación de Bessel $t^2w'' + tw' + (t^2 - \frac{1}{9})w = 0$, $t > 0$. *[Sugerencia:* después de derivar, sustituir y simplificar, proponga $t = \frac{2}{3}\alpha x^{3/2}$.]

42. Aplique el resultado del problema 41 a fin de expresar la solución general de la ecuación de Airy para $x > 0$, en términos de funciones de Bessel.

43. a) Aplique la solución general que obtuvo en el problema 42 para resolver el problema de valor inicial

$$4x'' + tx = 0, \qquad x(0.1) = 1, \quad x'(0.1) = -\frac{1}{2}.$$

Evalúe los coeficientes con un SAC.

b) Con el SAC grafique la solución obtenida en la parte a) en el intervalo $0 \le t \le 200$. ¿Esta gráfica corrobora su conjetura del problema 16, ejercicios 5. 1?

44. Una columna delgada uniforme, vertical, con su base empotrada en el piso, se pandea apartándose de la vertical, por la influencia de su propio peso, cuando su longitud es mayor que determinada altura crítica. Se puede demostrar que la deflexión angular $\theta(x)$ de la columna respecto de la vertical y en un punto $P(x)$ es una solución del problema de valores en la frontera

$$EI\frac{d^2\theta}{dx^2} + \delta g(L - x)\theta = 0, \qquad \theta(0) = 0, \quad \theta'(L) = 0,$$

en donde E es el módulo de elasticidad, I el momento de inercia de la sección transversal, δ es la densidad lineal constante y x es la distancia a lo largo de la columna, a partir de la base (Fig. 6.5). La columna sólo se pandea si este problema de valor en la frontera tiene una solución no trivial.

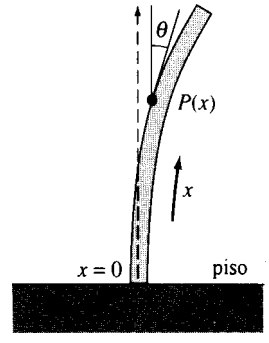


FIGURA 6.5

a) Primero cambie las variables $t = L - x$ y formule el problema de valor inicial que resulta. Luego use el resultado del problema 42 para expresar la solución general de la ecuación diferencial en términos de funciones de Bessel.

b) Con ayuda de un sistema algebraico de computación (SAC) calcule la longitud crítica L de una varilla maciza de acero de radio $r = 0.05$ in, $\delta g = 0.28$ lb/in, $E = 2.6 \times 10^7$ lb/in^2, $A = \pi r^2$ e $Z = \frac{1}{4}\pi r^4$.

45. a) Emplee las soluciones explícitas $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de la ecuación de Legendre y los valores adecuados de c_0 y c_1 para determinar los polinomios de Legendre $P_6(x)$ y $P_7(x)$.

b) Escriba las ecuaciones diferenciales para las que $P_6(x)$ y $P_7(x)$ son soluciones particulares.

46. Demuestre que la ecuación de Legendre tiene la forma alternativa

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)y = 0.$$

47. Demuestre que la ecuación

$$\operatorname{sen}\theta\frac{d^2y}{d\theta^2} + \cos\theta\frac{dy}{d\theta} + n(n+1)(\operatorname{sen}\theta)y = 0$$

se puede transformar en la ecuación de Legendre con la sustitución $x = \cos\theta$.

48. El polinomio general de Legendre se puede escribir en la forma

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k},$$

en donde $[n/2]$ es el máximo entero no mayor que $n/2$. Compruebe los resultados para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5.

49. Emplee la serie binomial para demostrar formalmente que

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$

50. Aplique el resultado del problema 49 para demostrar que $P_n(1) = 1$, y que $P_n(-1) = (-1)^n$.

51. Utilice la relación de recurrencia (23) y $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ para generar los siguientes cinco polinomios de Legendre.

52. Los polinomios de Legendre también se generan mediante la **fórmula de Rodrigues**

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Compruebe los resultados para $n = 0, 1, 2, 3$.

Problemas para discusión

53. Para fines de este problema haga caso omiso de las gráficas de la figura 6.2. Emplee la sustitución $y = u/\sqrt{x}$ para demostrar que la ecuación de Bessel (1) tiene la forma alternativa

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)u = 0.$$

Ésta es una forma de la ecuación diferencial del problema 12. Para un valor fijo de ν, describa cómo la ecuación anterior permite seguir el comportamiento cualitativo de (1) cuando $x \to \infty$.

54. Como consecuencia del problema 46, observamos que

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)] = -n(n+1)P_n(x) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}[(1-x^2)P_m'(x)] = -m(m+1)P_m(x).$$

Describa cómo se pueden usar estas dos identidades a fin de comprobar que

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0, \quad m \neq n.$$

EJERCICIOS DE REPASO

1. Especifique los puntos ordinarios de $(x^3 - 8)y'' - 2xy' + y = 0$.

2. Especifique los puntos singulares de $(x^4 - 16)y'' + 2y = 0$.

En los problemas 3 a 6 especifique los puntos singulares regulares e irregulares de la ecuación diferencial respectiva.

3. $(x^2 - 10x^2 + 25x)y'' + y' = 0$
4. $(x^3 - 10x^2 + 25x)y'' + y = 0$
5. $x^2(x^2 - 9)^2y'' - (x^2 - 9)y' + xy = 0$
6. $x(x^2 + 1)^3y'' + y' - 8xy = 0$

En los problemas 7 y 8 especifique un intervalo en torno a $x = 0$ para el que converja una solución en serie de potencias de la ecuación diferencial respectiva.

7. $y'' - xy' + 6y = 0$
8. $(x^2 - 4)y'' - 2xy' + 9y = 0$

En los problemas 9 a 12 determine dos soluciones en series de potencias de cada ecuación diferencial en torno al punto $x = 0$.

9. $y'' - xy' - y = 0$
10. $y'' - x^2y' + xy = 0$
11. $(x - 1)y'' + 3y = 0$
12. $(\cos x)y'' + y = 0$

Resuelva los problemas de valor inicial 13 y 14.

13. $y'' + xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -2$
14. $(x + 2)y'' + 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

Determine dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial respectiva en los problemas 15 a 20.

15. $2x^2y'' + xy' - (x + 1)y = 0$
16. $2xy'' + y' + y = 0$
17. $x(1 - x)y'' - 2y' + y = 0$
18. $x^2y'' - xy' + (x^2 + 1)y = 0$
19. $xy'' - (2x - 1)y' + (x - 1)y = 0$
20. $x^2y'' - x^2y' + (x^2 - 2)y = 0$